

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЛАМИНАРНОГО ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО НАПОРНОГО ДВИЖЕНИЯ

А.САРУХАНИЯН, А.МАНУКЯН

Ереванский государственный университет архитектуры и строительств

Рассматривается нестационарное плоскопараллельное напорное движение вязкой жидкости при произвольных начальных и граничных условиях.

Получены закономерности распределения мгновенных скоростей по живому сечению для общего случая, когда начальное распределение скоростей и перепад давления заданы в виде произвольных функций. Полученные закономерности мгновенных скоростей позволяют вычислить коэффициенты количества движения и кинетической энергии, потери энергии при неустановившемся движении, определить закономерность изменения (деформации) профиля скоростей во времени, получить характер изменения коэффициентов количества движения β и кинетической энергии α .

Ключевые слова: вязкая жидкость, граничные условия, ламинарное движение, мгновенные скорости, неустановившееся движение, количество движения

Исследование нестационарных процессов в напорных системах актуально для правильного понимания их сути и выбора расчетных схем при конструировании различных систем и аппаратов общепромышленного назначения. Плоскопараллельная модель напорного движения является основой для изучения структуры потоков, характерных для многих систем и напорных линий аппаратов автоматизированных комплексов [1,2].

Рассмотрим плоскопараллельное напорное движение вязкой жидкости между двумя неограниченными параллельными неподвижными стенками, расстояние между которыми $2h$ (рисунок). Движение жидкости рассмотрим в декартовой системе координат oxy , начало которой разместим в центре между пластинами и направим координату x по направлению оси движения. Полагая, что жидкость движется только по направлению оси ox , $u_x \neq 0$, $u_y = u_z = 0$.

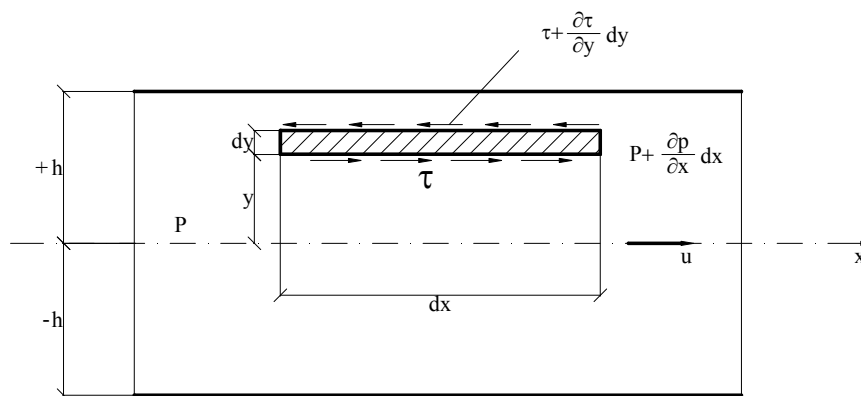


Рисунок.

Без учета начального участка или участка формирования движения, где изменение гидромеханических параметров происходит так же по направлению движения, рассмотрим стилизованный участок движения, где гидротехнические параметры

изменяются только по живому сечению потока. В этих предположениях уравнения Навье-Стокса и неразрывности без учета массовых сил примут вид:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Из последних двух уравнений следует, что давление в живом сечении потока не зависит от координат, а зависит только от времени, т.е.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f(t). \quad (4)$$

Полагая, что в начальный момент времени распределение скоростей по живому сечению имеет произвольную форму, зависящую от координаты y , т.е. $u_x = \varphi(y)$, при $t=0$ исследование нестационарного плоскопараллельного напорного движения сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = f(t) + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (5)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u_x(y, t) = 0, \text{ при } y = \pm h, \quad t > 0; \quad (6)$$

$$u_x(y, t) = \varphi(y) \text{ при } t = 0, \quad (-h < y < +h). \quad (7)$$

Введем безразмерные координаты и параметры

$$u_x = u_\infty \cdot u_0; \quad x = h \cdot x_0; \quad y = h \cdot y_0; \quad t = \frac{h}{u_\infty} \cdot t_0, \quad (8)$$

где $p = \rho \cdot u_\infty^2 \cdot p_0$; $u_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} u_x(0, t)$.

Тогда уравнение (1) преобразуется в вид

$$\frac{\partial(u_\infty u_0)}{\partial\left(\frac{h}{u_\infty} \cdot t_0\right)} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\rho u_\infty^2}{h} \frac{\partial p_0}{\partial x_0} + \nu \frac{\partial}{h \partial y_0} \cdot \frac{\partial(u_\infty u_0)}{h \partial y_0}.$$

Упрощая последнее уравнение, получаем

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_0} = -\frac{\partial p_0}{\partial x_0} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_0^2}, \quad (9)$$

где $Re = \frac{u_\infty h}{\nu}$ - число Рейнольдса.

В безразмерной форме представим также начальные и граничные условия:

$$1) \quad u_x(y, t) = u_x\left(h \cdot y_0, \frac{h}{u_\infty} t_0\right) \Big|_{y_0 = \pm 1} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{u_\infty u_x\left(h \cdot y_0, \frac{h}{u_\infty} t_0\right)}{u_\infty} \Big|_{y_0 = \pm 1} = u_\infty u_0\left(h \cdot y_0, \frac{h}{u_\infty} t_0\right) \Big|_{y_0 = \pm 1} \Rightarrow u_0(y_0, t_0) \Big|_{y_0 = \pm 1} = 0;$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad u_x(y,0) = \varphi(y) &\Rightarrow \frac{u_\infty u_x(y,0)}{u_\infty} = \frac{u_\infty \varphi(y)}{u_\infty} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow u_0(y_0,0) = \varphi_0(y_0), \quad \text{при } t_0 = 0, \quad -1 \leq y_0 \leq +1 \quad \left(\varphi_0(y_0) = \frac{\varphi(hy)}{u_\infty} \right), \\
 3) \quad f(t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &\rightarrow -\frac{\rho u_\infty^2 \partial p_0}{\rho \partial h x_0} = -\frac{u_\infty^2}{h} \frac{\partial p_0}{\partial x_0} \Rightarrow \frac{\partial p_0}{\partial x} = f_0(t_0) \quad \left(f_0(t_0) = \frac{hf\left(\frac{h}{u_\infty} t_0\right)}{u_\infty^2} \right).
 \end{aligned}$$

Опуская нулевые индексы, в безразмерных величинах получаем краевую задачу. Интегрируем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(t) + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (10)$$

при следующих условиях:

$$u(y, t) = 0, \quad \text{при } y = \pm 1, \quad t > 0; \quad (11)$$

$$u(y, t) = \varphi(y) \quad \text{при } t = 0, \quad (-1 < y < +1). \quad (12)$$

При стационарном движении $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ распределение скоростей по живому сечению потока имеет форму квадратной параболы [3]:

$$u_{ст} = \frac{Re \cdot p}{2} (1 - y^2) = u_\infty (1 - y^2), \quad (13)$$

где $u_\infty = \frac{Re \cdot p}{2}$ - максимальная скорость в центре потока.

Средняя скорость живого сечения будет

$$V = \frac{Re \cdot p}{3} = \frac{2}{3} u_\infty. \quad (14)$$

Коэффициенты количества движения β и неравномерного распределения скоростей α запишутся в форме:

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\int_{-1}^{+1} \left(\frac{Re \cdot p}{2} (1 - y^2)^2 \right) dy}{\left(\frac{Re \cdot p}{3} \right)^2} = 1.2; \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\int_{-1}^{+1} \left(\left(\frac{Re \cdot p}{2} \right)^3 (1 - y^2)^3 \right) dy}{\left(\frac{Re \cdot p}{3} \right)^3} = \frac{54}{35}. \quad (16)$$

Решение уравнения (10) при условиях (11), (12) поищем в виде суммы [4]

$$u_x(y, t) = u_1(y, t) + u_2(y, t), \quad (17)$$

где $u_1(y, t)$ есть решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (18)$$

при неоднородных краевых условиях

$$u_1(y, t) = 0, \text{ при } y = \pm 1, \quad t > 0; \quad (19)$$

$$u_1(y, t) = \varphi(y), \text{ при } t = 0, \quad (-1 < y < +1); \quad (20)$$

$u_2(y, t)$ есть решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = f(t) + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \quad (21)$$

при однородных краевых условиях

$$u_2(y, t) = 0, \text{ при } y = \pm 1, \quad t > 0; \quad (22)$$

$$u_2(y, t) = 0, \text{ при } t = 0, \quad (-1 < y < +1). \quad (23)$$

Функция $u_1(y, t)$ учитывает отклонение скоростей по живому сечению от начального распределения $u_2(y, t)$ и отклонение от перепада давления. Решение уравнения (18) поищем в виде суммы бесконечных рядов

$$u_1(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{(2k-1)}{2} \pi y\right) \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 (2k-1)^2}{4 Re} t\right), \quad (24)$$

где C_k - постоянные коэффициенты, значение которых определяется из начального условия задачи (20). Имеем:

$$u_1(y, 0) = \varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{(2k-1)}{2} \pi y\right). \quad (25)$$

Для определения значения коэффициентов C_k обе части равенства (25) умножим на $\cos\left(\frac{(2k-1)}{2} \pi y\right)$ и проинтегрируем в промежутке $(0; +1)$. Учитывая, что

$$\int_0^{+1} \cos\left(\frac{(2k-1)}{2} \pi y\right) \cdot \cos\left(\frac{(2k-1)}{2} \pi y\right) dy = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq n; \\ \frac{1}{2}, & \text{при } k = n, \end{cases} \quad (26)$$

получим

$$C_k = 2 \int_0^{+1} \varphi(y) \cdot \cos\left(\frac{(2k-1)}{2} \pi y\right) dy. \quad (27)$$

Решение неоднородного уравнения (21) поищем в виде суммы по собственным функциям задачи, т.е.

$$u_2(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cdot \cos\left(\frac{(2k-1)}{2} \pi y\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 (2k-1)^2}{4 Re} t\right), \quad (28)$$

где $b_k(t)$ – переменные коэффициенты, определяемые из начального условия задачи (23), т.е.

$$b_k(t)|_{t=0} = 0. \quad (29)$$

С учетом разложения (28) уравнение (21) примет вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b'_k(t) \cdot \cos\left(\frac{(2k-1)}{2} \pi y\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 (2k-1)^2}{4 Re} t\right) = f(t). \quad (30)$$

Теперь функцию $f(t)$ в интервале $[0; +1]$ разложим в ряд Фурье по косинусу

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \cdot \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi y\right), \quad (31)$$

где

$$\gamma_k(t) = 2 \int_0^1 f(t) \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi y\right) dy. \quad (32)$$

Интегрируя последнее выражение, получаем

$$\gamma_k(t) = \frac{4f(t)}{(2k-1)\pi} \cdot \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} y\right) \Big|_0^1 = \frac{4f(t)}{(2k-1)\pi} \cdot \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) = \frac{(-1)^{k+1} 4f(t)}{(2k-1)\pi}, \quad (33)$$

откуда следует, что коэффициенты $b_k(t)$ вычисляются из линейного дифференциального уравнения

$$b'_k(t) \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{4\text{Re}}t\right) = \frac{(-1)^{k+1} 4f(t)}{(2k-1)\pi}. \quad (34)$$

Решением уравнения (34) будет

$$b_k(t) = -\frac{4(-1)^{k+1} F(t)}{\pi(2k-1)}, \quad (35)$$

где

$$F(t) = \int_0^t f(u) \cdot \exp\left(\frac{\pi^2(2k-1)^2}{4\text{Re}}u\right) du. \quad (36)$$

Таким образом, в плоскопараллельном нестационарном ламинарном потоке при произвольном начальном распределении скоростей и перепаде давления мгновенные скорости по живому сечению распределяются по закону

$$u_x(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k + \frac{(-1)^{k+1} 4F(t)}{(2k-1)\pi} \right] \cdot \cos\left[\frac{(2k-1)}{2}\pi y\right] \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{4\text{Re}}t\right). \quad (37)$$

$(-1 < y < +1, \quad 0 \leq t < \infty).$

Следует отметить, что полученное решение относится к общему случаю задачи, откуда можно, получить частные решения многих практических задач.

Касательные напряжения в ламинарном потоке определяются по закону Ньютона [5,6]

$$\tau = \pm \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (38)$$

откуда распределение касательных напряжений по живому сечению в нестационарном плоскопараллельном потоке будет:

$$\tau = \mu \sum_{k=1}^{\infty} \pi \frac{(2k-1)}{2} \left[C_k + \frac{(-1)^{k+1} 4F(t)}{(2k-1)\pi} \right] \cdot \sin\left[\pi \frac{(2k-1)}{2} y\right] \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{4\text{Re}}t\right). \quad (39)$$

$(-1 \leq y \leq 1, \quad t > 0).$

Средняя мгновенная скорость живого сечения:

$$V = \int_0^1 u_x dy = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left[C_k + \frac{(-1)^{k+1} 4F(t)}{(2k-1)\pi} \right] \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{4Re} t\right) \cdot \sin\left(\pi \frac{(2k-1)}{2} y\right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} \left[\frac{(-1)^{k+1} 4F(t)}{(2k-1)\pi} + C_k \right] \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{4Re} t\right).$$

Следовательно,

$$V = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} \left[\frac{(-1)^{k+1} 4f(t)}{(2k-1)\pi} + C_k \right] \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{4Re} t\right); \quad 0 \leq t < \infty. \quad (40)$$

Закономерность изменения коэффициента количества движения определяем исходя из уравнений (37) и (40). Получим:

$$\beta = \frac{\int_0^1 u^2 dy}{2V^2} = \frac{1}{V^2} \int_0^1 u_x^2 dy. \quad (41)$$

Для вычисления интеграла в числителе воспользуемся свойством равенства Парсеваля [3], которое справедливо для системы ортогональных функций. Поэтому систему собственных функций задачи приведем в нормализованную ортогональную систему. С этой целью уравнение (37) перепишем в виде:

$$u_x(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \cos\left(\pi \frac{(2k-1)}{2} y\right), \quad (0 < y < 1), \quad (42)$$

где

$$A_k(t) = \left[C_k + \frac{(-1)^{k+1} 4F_k(t)}{\pi(2k-1)} \right] \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{4Re} t\right). \quad (43)$$

Условие ортогональности системы функции $\cos\left(\pi \frac{(2k-1)}{2} y\right)$, $(k = 1, 2, \dots)$ будет

$$\int_0^1 \cos\left(\pi \frac{(2k-1)}{2} y\right) \cdot \cos\left(\pi \frac{(2m-1)}{2} y\right) dy = \begin{cases} 0, & (k \neq m); \\ \frac{1}{2}, & (k = m). \end{cases}$$

Следовательно, система функции

$$\psi_k(y) = \sqrt{2} \cos\left(\pi \frac{(2k-1)}{2} y\right), \quad (k = 1, 2, \dots)$$

в интервале $[0; 1]$ составляет нормализованную ортогональную систему

$$\int_0^1 \psi_k(y) \cdot \psi_m(y) dy = \begin{cases} 0, & (k \neq m); \\ 1, & (k = m). \end{cases} \quad (44)$$

Имея в виду равенства (44), ряд (43) перепишем в виде:

$$u_x(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(t)}{\sqrt{2}} \cdot \psi_k(y), \quad (0 < y < 1), \quad (45)$$

откуда следует равенство Парсеваля

$$\int_0^1 u_x^2(y, t) dy = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [A_k(t)]^2. \quad (46)$$

Подставляя значение коэффициента $A_k(t)$ в уравнение (46), получаем

$$\int_0^1 u_x^2(y, t) dy = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k + \frac{(-1)^{k+1} 4 F_k(t)}{\pi(2k-1)} \right]^2 \cdot \exp\left(-\frac{2\pi^2(2k-1)^2}{4 Re} t\right), \quad 0 \leq t < \infty. \quad (47)$$

Таким образом, для коэффициента количества движения окончательно получим:

$$\beta = \frac{1}{2V^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k + \frac{(-1)^{k+1} 4 F_k(t)}{\pi(2k-1)} \right]^2 \cdot \exp\left(-\frac{2\pi^2(2k-1)^2}{4 Re} t\right), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (48)$$

где V – мгновенная средняя скорость живого сечения.

Коэффициент неравномерного распределения мгновенных скоростей

$$\alpha = \frac{4}{3\pi V^3} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k + \frac{(-1)^{k+1} 4 F_k(t)}{\pi(2k-1)} \right] \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{4 Re} t\right) \right]^3. \quad (49)$$

Из формул (48) и (49) следует, что $\beta=1$, $\alpha=1$ при $t=0$ $\beta \rightarrow 1,2$, $\alpha \rightarrow \frac{54}{35}$ при $t \rightarrow \infty$, что соответствует стационарному режиму.

Выводы

Результаты выполненных исследований позволяют сделать следующие выводы.

1. Получена закономерность распределения мгновенных скоростей по живому сечению при произвольном начальном распределении скоростей и перепаде давления, позволяющая вычислить подобные закономерности при любых практических задачах, касающихся аппаратов автоматизированных систем и напорных линий, а также систем смазки, для которых в основном приемлемы модели плоскопараллельного напорного движения.
2. Исследована закономерность изменения (деформации) профиля скоростей по времени.
3. Получена закономерность изменения средней скорости.
4. Определен характер изменения коэффициентов количества движения β и кинетической энергии α .
5. Определены потери напора соответствующего неустановившегося движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах. М.:изд-во АН СССР. 1952.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.:Наука. 1973.
3. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Изд. 2-е. М.:Наука. 1974.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: 1999.
5. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: 1955.
6. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.:Л.: 1951.

**Arestak SARUKHANYAN, Doctor of Technical Science, Associate Professor,
Ani MANUKYAN, Chief Specialist
State University of Architecture and Construction of Erevan
E-mail: ani_manukyan@yahoo.com**