О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ АНАЛИЗА УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВОДОГРУНТОВОЙ КОМПОЗИЦИОННОЙ СРЕДЫ

Л. МИНКИН

Рассматривается система уравнений движения водогрунтовой смеси, предложенная проф. Т.Г.Войнич-Сяноженцким. Приводятся разработанные автором некоторые решения системы уравнений в линейной и нелинейной постановках. Излагается методика их приведения к системе уравнений Бюргерса, а затем - к общим положениям теплопроводности.

Расчеты выполнены для оценки параметров волн по разным методикам. Первая предусматривает численное решение системы уравнений движения по разработанному ранее автором методу характеристик, а вторая - приближенное решение системы по схеме Дресслера. Третья основана на применении способа малого параметра. И, наконец, четвертая использует как сведение основных уравнений задачи к уравнению Бюргерса и затем, как следствие, - к уравнению теплопроводности, так и расчеты по готовым соотношениям, приведенным в книге Дж.Уизема "Линейные и нелинейные волны" (1977).

Ключевые слова: водогрунтовая среда, скорость потока, влекомые наносы, устойчивость системы, донные волны, композиционная среда.

Уравнения движения водогрунтовой композиционной среды (смеси воды и грунта) предложены Т.Г.Войнич –Сяноженцким [1] и имеют следующий вид :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Q)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho W Q)=2\mu(1-s)\omega\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+g\rho(i_0-i_f)\omega+BT-B(\tau_0+ks\cos^2\varphi)-g\rho\omega\frac{\partial h}{\partial x}\cos\psi-$$
$$-\frac{\omega}{1+2f^2}\frac{\partial P}{\partial x}+2g(\rho_s-\rho_w)\frac{s\omega\sin^2\varphi}{1+\sin^2\varphi}\frac{\partial h}{\partial x}\cos\psi-g(\rho_s-\rho_w)\frac{s\omega\sin\varphi\cos\varphi}{1+\sin^2\varphi}\frac{\partial h}{\partial x}\cos\psi;$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0\ , \tag{1}$$

где Q - расход; W - средняя скорость; $h, i, \psi, B, \omega -$ геометрические характеристики потока смеси; $s, \varphi, \mu, k, f, \rho -$ физические параметры водогрунтовой среды [2].

Такая модель в первую очередь ориентирована на описание поведения донных наносов, но пригодна, в том числе, и для расчетов движений вязкой жидкости, и для описания поведения песка и смесей вязкой жидкости с песком в различных концентрациях.

Среди практических задач которые могут рассматриваться на основе уравнений модели - задачи о движении слоя влекомых наносов, вопросы описания поведения грунта вблизи мостовых опор, размывы и деформации в прибрежной зоне рек и морей и т.д.

Другими словами, модель применима тогда, когда из физических или иных соображений допустима стилизация конкретной задачи, связанной с описанием поведения водогрунтовой смеси в рамках одномерных уравнений.

Достаточно широкий спектр задач из тех что уже рассматривались и могут быть рассмотрены в дальнейшем, определяют, на наш взгляд, интерес к изучению собственно уравнений модели.

В первой части работы приводятся основные результаты – решения системы уравнений (1) для относительно простых, но имеющих практическое применение случаев, полученные главным образом, на основе упрощенных линеаризованных уравнений.

Во второй части работы рассмотрены нелинейные уравнения системы (1).

Показано, что нелинейная система уравнений модели родственна уравнению Бюргерса с переменными коэффициентами, т.е. может рассматриваться как модифицированное уравнение Бюргерса. Здесь же построена схема приближенного решения системы соответствующих уравнений.

Некоторые практические результаты анализа нелинейных уравнений для нескольких случаев приведены в [2,3].

Прежде, всего для стационарного продольно однородного движения слоя водогрунтовой смеси (влекомых наносов) толщиной h из (1) получаем

$$\mathbf{g\rho i_0\omega + BT - B(\tau_0 + ks\cos^2\varphi) - g\rho\omega i_s - g(\rho_s - \rho_w)\frac{sf\omega}{1+2f^2}\cos\psi = 0}. \qquad (2)$$

Используя формулу Шези для касательных напряжений на границе воды и грунта, принятую в гидравлике,

$$\mathbf{T = \frac{g}{C_H^2}\rho_w(V - W)^2},$$

где W - скорость водогрунтового слоя; V – скорость водного потока, получаем минимальное значение скорости потока, при которой начинается массовое движение наносов (слоя толшины в один средний диаметр частиц $h = d$).

$$\mathbf{V_1 = \frac{C_H}{\sqrt{g\rho_w}}\sqrt{\tau_0 + ks\cos^2\varphi + g(\rho_s - \rho_w)\frac{sfd}{1+2f^2}\cos\psi - g\rho i_0}}\,. \qquad (3)$$

Для исследования условий устойчивости стационарного продольно однородного движения слоя влекомых наносов толщиной h по отношению к малым возмущениям было получено следующее линейное уравнение

$$\mathbf{\frac{\partial^2\varsigma}{\partial t^2} + P_1\frac{\partial^2\varsigma}{\partial t\partial x} + P_2\frac{\partial^2\varsigma}{\partial x^2} + P_3\frac{\partial\varsigma}{\partial t} + P_4\frac{\partial\varsigma}{\partial x} = 0} \qquad (4)$$

где

$$\mathbf{P_1 = 2\alpha_0 W_0};$$

$$\mathbf{P_2 = \alpha_0 W_0{}^2 - \frac{gh_0}{1+2f^2}\frac{(\rho - \rho_w(1+2f^2)}{\rho}\cos\psi};$$

$$\mathbf{P_3 = \frac{2\rho_w g(V_0 - W_0)}{\rho h_0 C_H^2}};$$

$$\mathbf{P_4 = \frac{1}{\rho h_0 C_H^2}\left[\begin{array}{l} C_H^2(\tau_0 + ks\cos^2\varphi) + 2\rho_w g W_0(V_0 - W_0) + \rho_w(V_0 - W_0)^2\dfrac{gh_0}{3H_0} + \\ + \dfrac{3\rho_w g V_0(V_0 - W_0)}{H_0} - \rho_w g(V_0 - W_0)^2 \end{array}\right]}$$

Индекс 0 относит соответствующую величину к стационарному продольно однородному движению.

Решения уравнения (4) устойчивы по отношению к малым возмущениям, если средняя скорость потока $\mathbf{V}$ удовлетворяет неравенству $\mathbf{V} > \mathbf{V_2}$, где

$$\mathbf{V_2 = 1.5V_1 - \frac{z}{2g\rho_w V_1} + \sqrt{\frac{\alpha_0(g\rho_w V_1^2 - z)^2 + 4bV_1^2 g^2 \rho_w^{\ 2}}{4(\alpha_0 - 1)g^2 \rho_w^{\ 2} V_1^2}};}$$
$$\mathbf{z = C_H^2(\tau_0 + ks\cos^2\varphi), b = \frac{(\rho_s - \rho_w)}{\rho_w}\frac{sfh}{1+2f^2}\cos\psi.} \qquad (5)$$

Суть полученного результата в том,что при скоростях водного потока $\mathbf{V > V_1}$, больших первой критической, но меньших второй критической $\mathbf{V < V_2}$, стационарное продольно однородное движение неустойчиво, т.е. имеет место волновое – грядовое движение влекомых наносов. При $\mathbf{V > V_2}$ происходит сработка гряд , т.е. осуществляется возврат к безволновому ковровому движению наносов .

Решение нелинейной системы уравнений (1) для скоростей потока в диапазоне $\mathbf{V_2 > V > V_1}$, т.е определение параметров волнового движения придонного слоя выполнялось несколькими путями.

Численное решение системы уравнений (1) с помощью метода характеристик детально изложено в [2].

Приближенное решение системы (1) на основе схемы Дресслера – Мхитаряна позволило для квазиустановившегося движения донных волн оценить их геометрические параметры (максимальную высоту, длину, крутизну).

Было получено, что высота волны $\mathbf{h}$ такова, что $\mathbf{h_1 < h < h_2}$.

где

$$\mathbf{h_1 = \frac{z_0}{2}h^*(2 + z_0 - \sqrt{z_0^{\ 2} + 4z_0}),}$$
$$\mathbf{h_2 = \frac{z_0}{2}h^*(2 + z_0 + \sqrt{z_0^{\ 2} + 4z_0});}$$
$$\mathbf{z_0 = \sqrt{\frac{gG\rho_w}{C_H^{\ 2}M}};}$$
$$\mathbf{h^* = \frac{(V_0 - c)^3}{Gz^2};}$$
$$\mathbf{M = \frac{sfg(\rho_s - \rho_w)}{1+2f^2}\cos\psi;}$$
$$\mathbf{G = \frac{g}{\rho}\left[\rho - \frac{\rho_w}{1+2f^2} - \frac{2sf^2(\rho_s - \rho_w)}{1+2f^2}\right]\cos\psi;}$$

c - скорость квазиустановившегося движения донных волн; h_1, h_2 - минимальная и максимальная высоты донных волн соответственно.

Приведем основные фрагменты приближенного решения системы (1), основанного на использовании метода малого параметра.

Автомодельное преобразование $\mathbf{\xi = x - ct}$ переводит систему уравнений (1) в следующую систему обыкновенных диференциальных уравнений:

$$\mathbf{\frac{d}{d\xi}\left[(W-c)W\right] = 2\nu h\frac{d^2W}{d\xi^2} + gh(i_0 - i_f) + \frac{T - (\tau_0 + ks\cos^2\varphi}{\rho} + h\frac{\rho_w}{\rho}\frac{g}{1+2f^2}\frac{dh}{d\xi} +}$$
$$\mathbf{\frac{(\rho_s - \rho_w)}{\rho_w}\frac{2ghf^2}{1+2f^2}\cos\psi - gh\frac{dh}{d\xi}\cos\psi - \frac{(\rho_s - \rho_w)}{\rho_w}\frac{sghf}{1+2f^2}\cos\psi} \qquad (6)$$

$$\mathbf{(W - c)h = q_0 = const}. \qquad (7)$$

Здесь ν - коэффициент эффективной динамической вязкости;, $\nu = \frac{\mu}{\rho}(1-s)$.

Подставляя **W** из (7) в (6) и выполняя упрощения, получаем

$$2\nu q_0\left[(hh''-2(h')^2\right] = q_0{}^2\frac{dh}{d\xi} + A_1h^3\frac{dh}{d\xi} - A_2h^3 + \frac{\rho_w g\left[(V-c)h-q_0\right]^2}{\rho C_H^2} -$$

$$-\ (\tau_0 + ks\cos^2\varphi)h^2\ ; \tag{8}$$

где

$$A_1 = \frac{2(\rho_s-\rho_w)}{\rho_w}\frac{gf^2}{1+2f^2}\cos\psi - g\cos\psi + \frac{\rho_w}{\rho}\frac{g}{1+2f^2}$$

$$A_2 = \frac{(\rho_s-\rho_w)}{\rho_w}\frac{gf}{1+2f^2}\cos\psi + g(i_0-i_f).$$

Решение нелинейного уравнения (8) было получено методом малого параметра по степеням ν в виде

$$h(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(\xi)\nu^i\ . \tag{9}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ν из уравнения (8) получаем следующие соотношения (ограничимся первыми двумя членами ряда (9):

$$q_0{}^2\frac{dh_0}{d\xi} + A_1h_0^3\frac{dh_0}{d\xi} - A_2h_0^3 + A_3\left[(V-c)h_0-q_0\right]^2 - (\tau_0+ks\cos^2\varphi)h_0^2 = 0\ . \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &q_0\left[(h_0h_0''-2(h_0')^2\right] = \\ &= q_0{}^2\frac{dh_1}{d\xi} + A_1h_1{}^3\frac{dh_1}{d\xi} - A_2h_1{}^3 + A_3\left[(V-c)h_1-q_0\right] - (\tau_0+ks\cos^2\varphi)h_0^2; \end{aligned} \tag{11}$$

$$A_3 = \frac{g\rho_w}{\rho C_H^2}.$$

Соотношение (10) может быть переписано в виде:

$$\xi - \xi_0 = \int \frac{(q_0^2 + A_1h_0^3)dh_0}{A_2h_0^3 - A_3\left[(V-c)h_0-q_0\right]^2 + (\tau_0+ks\cos^2\varphi)h_0^2}\ . \tag{12}$$

Интересующие нас квазиустановившиеся донные волны возможны лишь в случае, если у уравнения $A_2h_0^3 - A_3\left[(V-c)h_0-q_0\right]^2 + (\tau_0+ks\cos^2\varphi)h = 0$ (13)
один корень вещественный $h = h_1^*$, а два других комплексно сопряженных $h = \alpha \pm \beta i$.

Интеграл уравнения (12) может быть записан следующим образом:

$$\xi - \xi_0 = \frac{A\ h_0}{A_2} + B_1\ln\left|\frac{h}{h_1^*} - 1\right| + B_2\ln\left|1 - \frac{2\alpha}{h_1^*} + \frac{\alpha^2+\beta^2}{h_1^{*2}}\right| + C_1\mathrm{arctg}\frac{h_0-\alpha}{\beta}, \tag{14}$$

откуда находятся соответствующие выражения для h_0 и h_1.

Приведем соотношение для h_0:

$$h_0 = \alpha + \beta\mathrm{tg}\{\frac{A_1h_0}{A_2C_1} + \frac{B_1}{C_1}\ln\left|\frac{h}{h_1^*} - 1\right| + \frac{B_2}{C_1}\ln\left|1 - \frac{2\alpha}{h_1^*} + \frac{\alpha^2+\beta^2}{h_1^{*2}}\right| - \frac{\xi_0-\xi}{C_1}\}\ . \tag{15}$$

Полученные на базе (15) решения неплохо согласуются с имеющимися данными экспериментов с капроновой крошкой [3].

В следующей части устанавливается, что система уравнений (1) сводится к одному из известных типов нелинейных уравнений - к уравнению Бюргерса с переменными коэффициентами.

Для этого запишем систему уравнений (1) в форме:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + w\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x} = 2\nu h\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(i_0 - i_f)h + \frac{T - B(\tau_0 + ks\cos^2\varphi)}{\rho} + A_1 h\frac{\partial h}{\partial x} + A_2 h. \quad (16)$$

Далее, следуя схеме преобразований нелинейных уравнений, развитой в [4], перепишем систему уравнений (16) в матричной форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial t} + Z\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + BS_x = 0. \quad (17)$$

Здесь U и S - векторы; A,B и Z - матрицы; $U = \begin{pmatrix} h \\ w \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных;

$$A = \begin{pmatrix} w & h \\ A_1 & w \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\tau_0 + ks\cos^2\varphi - T}{\rho h} \end{pmatrix};\ \ Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\nu(1-s) \end{pmatrix}.$$

Представляя вектор U в виде

$$U = U_0 + U_1\exp(ikx - i\sigma t), \quad (18)$$

подставляем (18) в (17). Получаем

$$\left\{-(\frac{\sigma}{k})I + A_0 ikZ\right\}U_1 = 0. \quad (19)$$

Здесь и в дальнейшем индекс 0 относит соответствующую величину к стационарному движению.

Уравнение (19) решается методом последовательных приближений.

В нулевом приближении имеем

$$\left\{-(\frac{\sigma}{k})I + A_0\right\}U_{10} = 0; \quad (20)$$

U_{10} - один из правых собственных векторов матрицы A_0, соответствующий собственному значению $c_0 = \dfrac{\sigma}{k}$.

Имеем $$c_0 = \frac{\sigma}{k} = w_0 + \sqrt{A_1 h_0};$$

$l_0 = (\sqrt{A_1}, \sqrt{h_0}), r_0 = (\sqrt{h_0}, \sqrt{A_1})$ - левый и правый собственные векторы матрицы A_0.

Подставляя полученные выражения в (19) и умножая на l_0 слева, получаем

$$c_1 = \frac{\sigma}{k} = c_0 + \frac{irl_0 Z_0 r_0}{l_0 r_0}. \quad (21)$$

Далее, следуя [4], переходим от (x,t) к (ς, η) с помощью соотношений

$$\varsigma = \varepsilon\left(\int\frac{dx}{c_0} - t\right),\ \eta = \varepsilon^2 x.$$

Предполагая, что k мало(приближение длинных волн), а также используя метод последовательных приближений по степеням параметра $\varepsilon \approx \mathbf{k}$ малого параметра, характеризущего степень нелинейности системы

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \varepsilon \mathbf{A}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{A}_2 + ...;$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_0 + \varepsilon \mathbf{B}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{B}_2 + ...;$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \varepsilon \mathbf{K}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{K}_2 + ...,$$

приводим систему (16) к уравнению Бюргерса с переменными коэффициентами

$$\mathbf{u}_\eta + \alpha \exp(-\chi\eta)\mathbf{u}\mathbf{u}_\zeta = \beta \mathbf{u}_{\zeta\zeta}, \tag{22}$$

где

$$\alpha = \frac{3}{2\mathbf{c}_0^2}, \beta = \frac{(1-\mathbf{s})\nu}{\mathbf{c}_0^2}.$$

Более подробно процедура сведения системы (16) к уравнению (22) изложена в [5]. Там же детально описаны использованные в (22) обозначения .

С помощью замены $\mathbf{u} = \varphi(\varsigma, \eta)\exp(\chi\eta)$ с уравнение (3) приводится к модифицированному уравнению Бюргерса с постоянными коэффициентами

$$\varphi_\eta + \chi\varphi + \alpha\varphi\varphi_\zeta = \beta\varphi_{\zeta\zeta}. \tag{23}$$

Отметим, что значения постоянных коэффициентов в уравнениях (22),(23) взяты на основе соответствующих параметров при продольно-однородном движении.

Для двух важных частных случаев 1) когда коэффициент χ пренебрежимо мал и (2) рассматриваются большие значения переменной η (асимптотическое поведение решения при $\eta \to \infty$) уравнения (22), (23) сводятся к уравнению теплопроводности.

Для этого посредством замены Коула–Хопфа $\varphi = -2\beta \frac{\Psi_\zeta}{\Psi}$ уравнение (22) трансформируется в уравнение

$$\psi_\eta = \mathbf{a}^2 \psi_{\varsigma\varsigma}, \tag{24}$$

т.е. в стандартное уравнение теплопроводности.

Заметим,что сведение исходной системы уравнений (1) к уравнению Бюргерса, а затем и к линейному уравнению – уравнению теплопроводности, - позволяет перенести существующие решения этого уравнения для рассматриваемой задачи.

Наиболее важные из них - это описание стационарных волн, N – волн, волн типа одиночный горб и разрывных решений для этих случаев. При этом, следуя [6], рассматривались решения для жидкостей с разными значениями чисел Рейнольдса.

Выполнялись расчеты для оценки параметров волн по разным методикам.

Первая методика - численное решение системы уравнений (1) с помощью метода характеристик, приведенная в [2], вторая схема, основанная на приближенных решениях системы (1) с помощью схемы Дресслера, т.е. на соотношениях для определения параметров донных волн также детально изложена в [2] .

Решение системы (1) на базе метода малого параметра составляло суть третьего метода. И, наконец, четвертая методика использовала как основу сведение основных уравнений задачи в соответствующих случаях к уравнению Бюргерса и соответственно к уравнению теплопроводности и расчеты с помощью готовых соотношений [6].

Сравнение полученных результатов расчетов для квазистационарных волн (длины, высоты и профили донных волн для двух модельных случаев) показало приемлемое совпадение для двух первых схем, различие по безразмерному параметру **z =h/**λ не превышало 35%.

Третья и четвертая схемы давали несколько большее расхождение.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Войнич–Сяноженцкий Т.Г. Гидродинамика устьевых участков рек и взморий бесприливных морей/Труды ЗакНИИГМИ 1972. Вып. 46(52).
2. Минкин Л. Исследование устойчивости дна водного потока и грядообразования на основе гидродинамической модели водогрунтовой смеси. Автореферат канд. дис. Тбилиси, ГрузнииЭГС. 1981.
3. Минкин Л. О решении уравнений движения донных наносов//Энергия. Тбилиси. 2005. Вып. 4(36). Ч.1.
4. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных средах. М.:Мир. 1983.
5. Минкин Л. О нестационарных уравнениях динамики водогрунтовой смеси// Энергия. Тбилиси. 2005. N 4(36). Ч.1.
6. Уизем Дж.Линейные и нелинейные волны. М.:Мир. 1977.

Леонид МИНКИН, канд.техн.наук

Израиль

E-mail: miilan@013.net

.