# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДОВ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КАРКАСНЫХ ЗДАНИЙ МЕТОДОМ ПРЯМОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

**В.А.АМБАРЦУМЯН, Л.А.ЛЕВОНЯН**

**Ереванский государственный университет архитектуры и строительства**

***Исследованы свободные нелинейные колебания каркасных зданий, динамическая расчетная схема которых представляется в виде систем с конечным числом степеней свободы. Применен метод прямой линеаризации. Получены значения периодов нелинейных колебаний для различных реальных зависимостей восстанавливающей силы от перемещения.***

***Ключевые слова: каркасное здание, колебание, период, нелинейность, линеаризация.***

**Для исследования свободных (автономных) нелинейных колебаний наиболее часто применяют различные методы такие как: метод возмущений, асимптотический метод Крылова-Боголюбова, метод Галеркина и др. [3,6,7]. Наиболее подробно изучены системы с одной степенью свободы. Работы, посвященные нелинейным колебаниям со многими степенями свободы, немногочисленны. В основном изучены колебания с двумя степенями свободы. В работах [1,2] с помощью потенциальной функции и с применением свойств геодезических линий в пространстве изучены многомассовые системы частного вида и получены конкретные результаты. В работе [4] асимптотическим методом получены значения периодов свободных колебаний многоэтажных зданий в случае, когда зависимость восстанавливающей силы от перемещения этажа имеет вид кубической параболы. В работе [5] получены значения периодов нелинейных колебаний в случае степенной зависимости восстанавливающей силы от перемещения. Некоторые конкретные результаты приведены также в работах [3,6,8,9], в которых, особенно в [9], дан также подробный анализ существующих методов исследований нелинейных систем. В работе [7] приведен метод прямой линеаризации, сущность которого заключается в замене заданной нелинейной системы линейной. При этом используется условие минимума квадратного отклонения между восстанавливающими силами заданной нелинейной и полученной линейной системами.**

**В настоящей работе метод прямой линеаризации распространяется на системы со многими степенями свободы. Показано, что вычислительная простота этого метода позволяет получить значения периодов свободных колебаний в явном виде для многих практически важных случаев зависимостей восстанавливающей силы от перемещения. Исследованы также колебания систем с одной степенью свободы, для которых получены новые результаты о значениях периодов нелинейных колебаний.**

**Рассмотрим свободные колебания одноэтажной рамы с недеформируемым ригелем, расчетная схема которой представляется в виде системы с одной степенью свободы (рис. 1).**

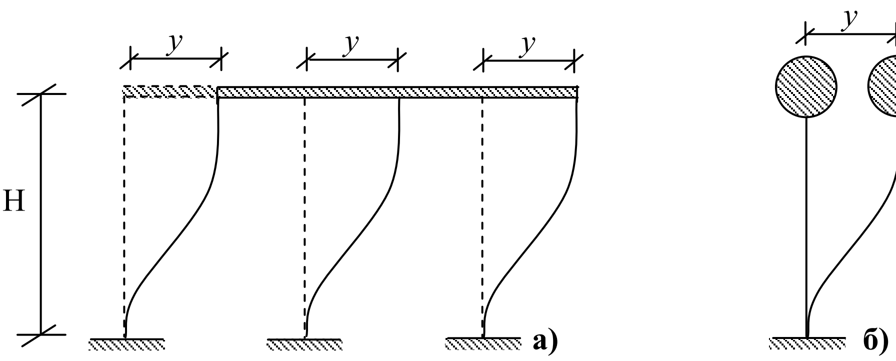



Рис. 1. а - схема рамы; б - динамическая расчетная схема

Уравнение свободных колебаний системы, когда зависимость восстанавливающей силы от перемещения нелинейна, можно представить в виде:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + af(y) = 0\,, \tag{1}$$

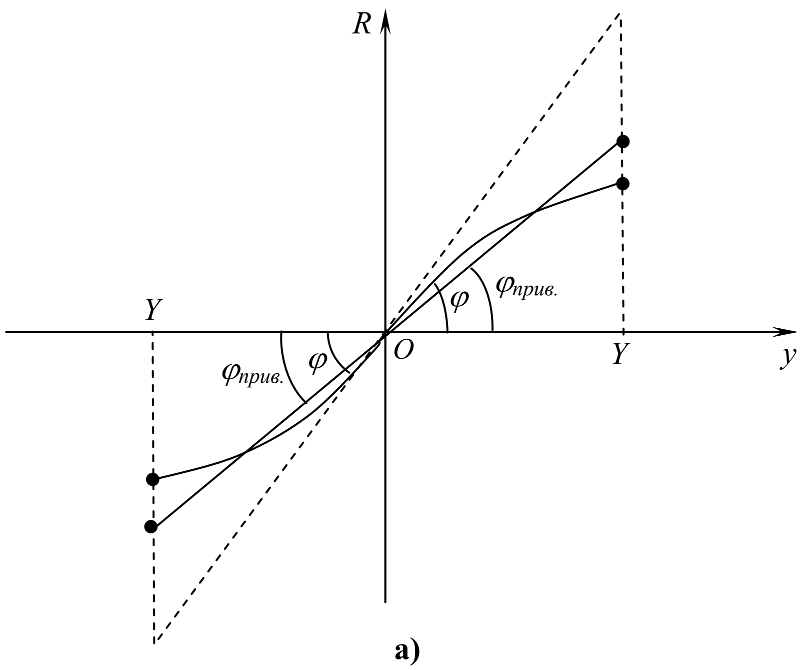
где $y$ - перемещение; $m$ - сосредоточенная масса; $R(y) = af(y)$ - восстанавливающая сила; $a$ - начальная жесткость системы; $a = tg\varphi$ (рис. 2); $f(y)$ - функция, характеризующая зависимость восстанавливающей силы от перемещения.

В линейно деформируемой системе $f(y) = y$

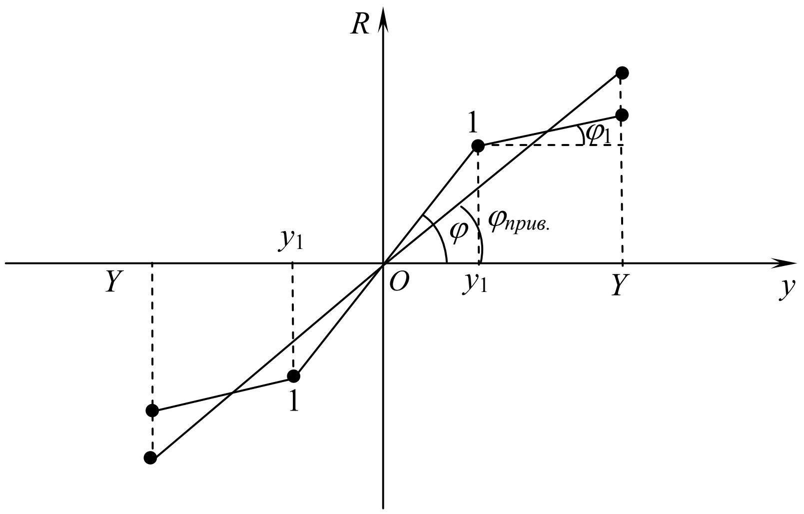
Начальная горизонтальная жесткость системы, которая одновременно является жесткостью соответствующей линейной системы, определяется по формуле [6]:

$$a = \frac{12}{H^3}\sum_{j=1}^{N} EJ_j\;, \tag{2}$$

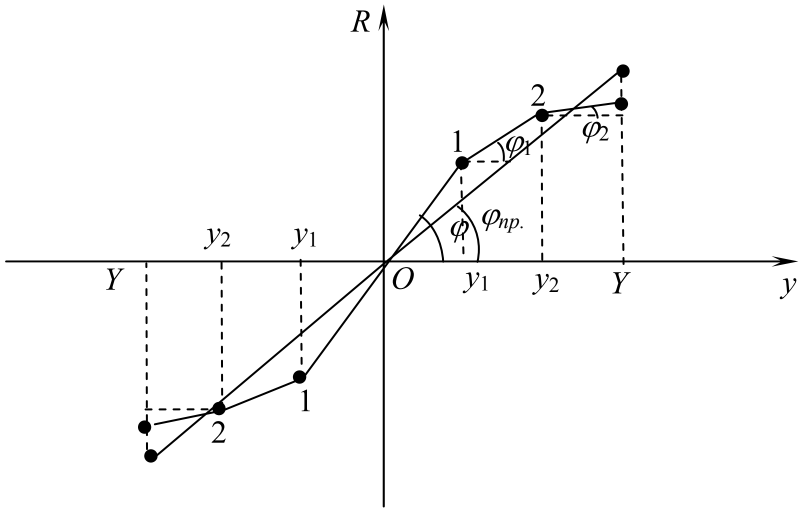
где $E$ - модуль упругости колонн; $J_j$ - момент инерции поперечного сечения $j$-й колонны; $N$ - количество колонн рамы (на рис. 1 $N = 3$).




а)




б)




в)

**Рис. 2. Зависимость восстанавливающей силы от перемещения:**
**а - криволинейная; б - билинейная; в - трехлинейная**

**Допустим, что найдена приведенная (усредненная) жесткость нелинейной системы $a_{пр}$. Тогда уравнение свободных колебаний приведенной системы будет иметь вид:**

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + a_{пр} \cdot y = 0 . \tag{3}$$

**Разность восстанавливающих сил $r(y)$ нелинейной и линейной систем**

$$r(y) = a \cdot f(y) - a_{пр} \cdot y . \tag{4}$$

**Чтобы подчеркнуть важность отклонений при больших значениях $y$, разность $r(y)$ берется в виде:**

$$r(y) = [a \cdot f(y) - a_{пр} \cdot y] \cdot y . \tag{5}$$

**Задача сводится к минимизации интеграла:**

$$\mathbf{I = \int_{-Y}^{Y} [a \cdot f(y) - a_{пр} \cdot y]^2 \cdot y^2 dy}\,. \tag{6}$$

**Имеем:**

$$\mathbf{\frac{dI}{da_{пр}} = -2\int_{-Y}^{Y} [a \cdot f(y) - a_{пр} \cdot y] \cdot y^3 dy = 0}\,. \tag{7}$$

**Получим**

$$\mathbf{a_{пр} = \frac{\int_{-Y}^{Y} a \cdot f(y) y^3 dy}{\int_{-Y}^{Y} y^4 dy}}\,. \tag{8}$$

**Имея в виду, что под интегралом находятся четные функции, находим:**

$$\mathbf{a_{пр} = \frac{5a}{Y^5}\int_{0}^{Y} f(y) y^3 dy}\,. \tag{9}$$

**Частота приведенной системы, которая одновременно является частотой и нелинейной системы, определяется по формуле:**

$$\mathbf{\omega_{прив} = \sqrt{\frac{a_{пр}}{m}}}\,. \tag{10}$$

**Подставляя значение (9) в (10), получаем:**

$$\mathbf{\omega_{прив} = \omega_{нел.} = \sqrt{\frac{a}{m}} \cdot \left\{\frac{5}{Y^5}\int_{0}^{Y} f(y) y^3 dy\right\}^{1/2} = \omega_{лин.} \cdot \left\{\frac{5}{Y^5}\int_{0}^{Y} f(y) y^3 dy\right\}^{1/2}}\,. \tag{11}$$

**Период нелинейной системы устанавливается формулой:**

$$\mathbf{T_{прив} = T_{нел.} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{a_{пр}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{a}} \cdot \left\{\frac{Y^5}{5a\int_{0}^{Y} f(y) y^3 dy}\right\}^{1/2} = T_{лин.} \cdot \left\{\frac{Y^5}{5a\int_{0}^{Y} f(y) y^3 dy}\right\}^{1/2}}\,. \tag{12}$$

**Рассмотрим случай, когда восстанавливающая сила изменяется по закону части кубической параболы, имеющему вид:**

$$\mathbf{f(y) = y - \varepsilon y^3; \qquad \varepsilon \le \frac{1}{3y^2}}\,. \tag{13}$$

**Тогда из (9) и (10) получим:**

$$\mathbf{\omega_{пр} = \omega_{лин}\left(1 - \frac{5}{7}\varepsilon Y^2\right)^{1/2}}\,. \tag{14}$$

**Для случая (13) имеется точное решение, выраженное через эллиптический интеграл первого рода (см., например,[6]).**

**При $\varepsilon Y^2 = 1/3$ $T_{нел.} = 1.146 T_{лин.}$ и $1.154 T_{лин}$. [6]. Значения точного и приближенного периодов отличаются всего на 0.7%.**

**При билинейной диаграмме (рис. 2,б) функция $f(y)$ запишется в виде:**

$$\mathbf{f(y) = \begin{cases} y; & y \le y_1; \\ \gamma y + (1-\gamma) y_1; & y \ge y_1, \end{cases}} \tag{15}$$

**где $\gamma = a_1 / a$.**

**Из (11) получим:**

$$\omega_{нел.} = \omega_{лин.}\left\{\gamma + \frac{5}{4}(1-\gamma)\frac{y_1}{Y} - \frac{(1-Y)}{4}\left(\frac{y_1}{Y}\right)^5\right\}^{1/2}. \quad (16)$$

При $\gamma = \frac{a_1}{a} = \frac{1}{4}$; $\beta = \frac{Y}{y_1} = 2$. Из (16) получим:

$$\omega_{нел.} = 0.844\omega_{лин.}; \qquad T_{нел.} = T_{лин.} \cdot 1.184.$$

Точное значение периода при вышеуказанных параметрах [6]

$$T_{нел.} = T_{лин.} \cdot 1.193.$$

Разница составляет 0.75%.

При зависимости восстанавливающей силы от перемещения, состоящего из трех прямолинейных отрезков (рис. 2,в), функция $f(y)$ представляется в виде:

$$f(y) = \begin{cases} y; & y \le y_1 \\ \gamma_1 y + (1-\gamma)y_1; & y_1 \le y \le y_2 \\ \gamma_2 y + (1-\gamma_1)y_1 + (\gamma_1-\gamma_2)y_2; & y \ge y_2 \end{cases}, \quad (17)$$

где $\gamma_1 = \frac{a_1}{a}$; $\gamma_2 = \frac{a_2}{a}$; $a = tg\varphi$; $a_1 = tg\varphi_1$; $a_2 = tg\varphi_2$ (рис. 2,в).

В этом случае из (11) следует

$$\omega_{нел.} = \omega_{лин.}\left\{\gamma_2 + \frac{5}{4}[1-\gamma_1+(\gamma_1-\gamma_2)\beta]\frac{y_1}{Y} - \left[\frac{1}{4}(1-\gamma_1) + \frac{1}{4}(\gamma_1-\gamma_2)\beta^5\right]\left(\frac{y_1}{Y}\right)^5\right\}^{1/2}, \quad (18)$$

**где: $Y$ - начальное перемещение $(Y > y_2)$; $\beta = \frac{y_2}{y_1}$.**

**Не составляет труда получить значения частоты нелинейных колебаний в случае, когда зависимость $R$-y представляется в виде кривой, состоящей из многих прямолинейных отрезков. Заметим, что другими методами получить эту частоту либо затруднительно, либо невозможно в явном виде.**

**Рассмотрим случай, когда зависимость $R$-y представляется в виде произвольного степенного ряда. Имеем:**

$$f(y) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j y^j, \quad (19)$$

**где $b_j$ – заданные коэффициенты ряда.**

**Частота нелинейных колебаний в данном случае находится по форме:**

$$\omega_{нел.} = \omega_{лин.}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{5b_j}{j+1}y^{j-1}. \quad (20)$$

**Из (20) может быть получено значение частоты в случае (13), а также другие варианты, описанные в [3, 7].**

**Определим значение частоты в случае, когда зависимость $R$-y представляется в виде восходящей части синусоиды.**

**Функция $f(y)$ задается в виде:**

$$f(y) = \frac{1}{\varepsilon}\sin\varepsilon y; \qquad \varepsilon \le \frac{\pi}{2y}. \quad (21)$$

**Частота нелинейных колебаний**

$$\omega_{нел.} = \omega_{лин.}\left\{\left(\frac{15}{\varepsilon^3 Y^3} - \frac{30}{\varepsilon^5 Y^5}\right)\sin\varepsilon Y - \left(\frac{15}{\varepsilon^2 Y^2} - \frac{30}{\varepsilon^4 Y^4}\right)\cos\varepsilon Y\right\}^{1/2}. \quad (22)$$

**Некоторые функции, как, например, кубическая парабола или синусоида, часто применяются при исследованиях нелинейных колебаний. Однако эти функции имеют ограничения вида (13), (21), которые связаны с тем, что используется лишь восходящая часть этих функций. Это уменьшает возможности практического применения этих зависимостей, так как значения коэффициентов $\varepsilon$, входящих в эти формулы, должны быть малыми. С этой точки зрения удобно применять функции, имеющие только восходящую часть, т.е. их производные всегда положительны. Одной из таких функций является функция арктангенса. Функцию $f(y)$ представим в виде:**

$$f(y)=\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{arctg}\varepsilon y\,. \qquad (23)$$

**В этом случае для частоты запишем:**

$$\omega_{нел.}=\omega_{лин.}\left\{\frac{5}{4}\frac{\operatorname{arctg}\varepsilon Y}{\varepsilon Y}-\frac{5}{12\varepsilon^2Y^2}+\frac{5}{4\varepsilon^4Y^4}-\frac{5}{4\varepsilon^5Y^5}\operatorname{arctg}\varepsilon Y\right\}^{1/2}. \qquad (24)$$

**С помощью формулы (24) вычислены значения $\frac{\omega_{нел.}}{\omega_{лин.}}$, а затем $\frac{T_{нел.}}{T_{лин.}}$ при различных значениях $\varepsilon Y$. Результаты расчетов приведены в табл. 1.**

**Значения $\frac{\omega_{нел.}}{\omega_{лин.}}$ и $\frac{T_{нел.}}{T_{лин.}}$**

**Таблица 1**

| $\varepsilon Y$ | $\frac{\omega_{нел.}}{\omega_{лин.}}$ | $\frac{T_{нел.}}{T_{лин.}}$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.913 | 1.095 |
| 2 | 0.789 | 1.267 |
| 4 | 0.625 | 1.600 |
| 5 | 0.570 | 1.754 |
| 6 | 0.531 | 1.883 |
| 8 | 0.469 | 2.134 |
| 10 | 0.424 | 2.360 |

**Как видно из табл. 1, частоты нелинейных колебаний по сравнению с частотами линейных колебаний при увеличении $\varepsilon Y$ уменьшаются, а периоды увеличиваются.**

**Рассмотрим теперь свободные нелинейные колебания многоэтажных рам с недеформируемыми ригелями, расчетная схема которых представляется в виде системы с конечным числом степеней свободы (рис. 3).**

**Уравнения свободных колебаний нелинейно-деформируемой системы могут быть записаны в виде [6]:**

$$\sum_{i=k}^{n}m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}+R_k(y_k-y_{k-1})=0\,;\quad k=1,2,...,n\,, \qquad (25)$$

**где $y_k$ - перемещение *k*-го этажа, $m_i$ - масса, сосредоточенная на уровне *k*-го этажа, $R_k(y_k-y_{k-1})$ - восстанавливающая сила *k* -го этажа, *n* - число этажей.**

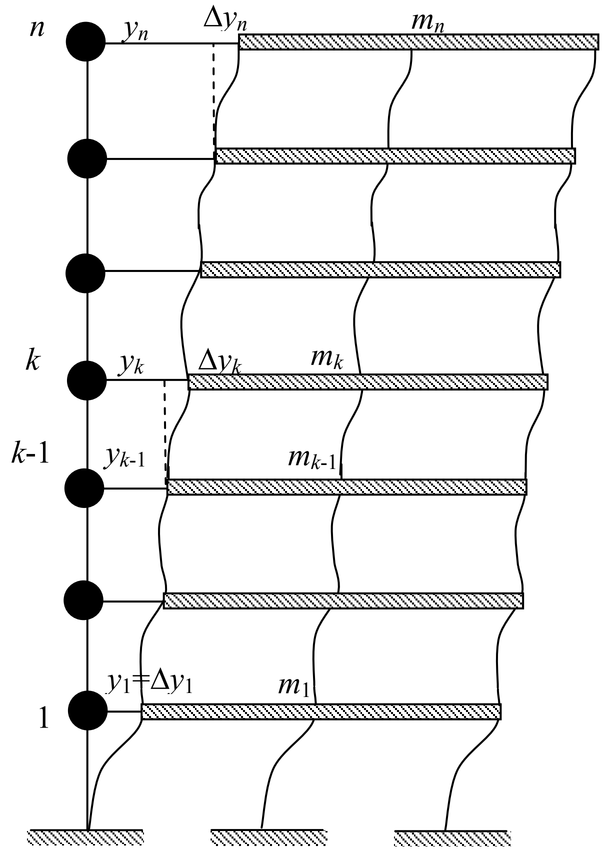



**Рис. 3. Схема деформирования здания**

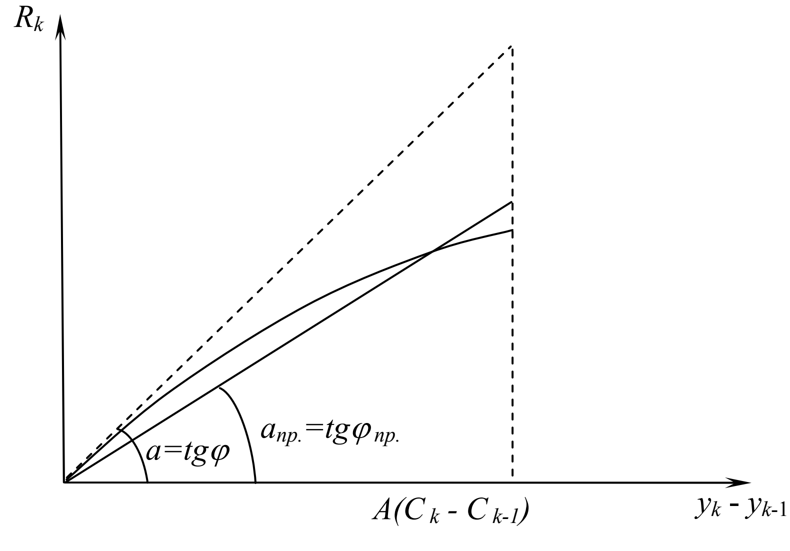



**Рис. 4. Зависимость восстанавливающей силы от перекоса этажа**

**В дальнейшем примем, что жесткости всех этажей равны. Восстанавливающая сила *k*-го этажа будет:**

$$\mathbf{R_k(y_k - y_{k-1}) = af_k(y_k - y_{k-1}), \quad k = 1,2,...,n,} \tag{26}$$

**где $a$ – начальная жесткость этажа.**

**Принимаем, что нелинейная система может быть заменена линейной с жесткостью $a_{пр.}$. В этом случае восстанавливающая сила этажа будет**

$$R_k(y_k - y_{k-1}) = a_{пр.}(y_k - y_{k-1}). \tag{27}$$

**Составляем разность суммарных восстанавливающих сил заданной нелинейной и линейной систем. Принимаем, что коэффициенты формы колебаний нелинейной системы пропорциональны коэффициентам форм линейной системы. Аналогично (6) и в этом случае задача сводится к минимизации интеграла, представляющего среднеквадратическую разность восстанавливающих сил нелинейных и линейных систем:**

$$I = \sum_{k=1}^{n} 2 \int_0^{Y(C_k - C_{k-1})} [af_k(y_k - y_{k-1}) - a_{пр.}(y_k - y_{k-1})]^2 (y_k - y_{k-1})^2 d(y_k - y_{k-1}), \tag{28}$$

**где $C_k$ – заданные коэффициенты основной формы колебаний.**

**Обозначим $\Delta_k = (y_k - y_{k-1})$; $\overline{\Delta}_k = C_k - C_{k-1}$.**

**Из (28) имеем:**

$$\frac{dI}{da_{пр.}} = -4\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\overline{\Delta}_k Y} af_k(\Delta_k) \cdot \Delta_k^3 d\Delta_k + 4\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\overline{\Delta}_k Y} \Delta_k^4 d\Delta_k = 0. \tag{29}$$

**Отсюда получим:**

$$a_{пр.} = \frac{5a}{Y^5} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_0^{\overline{\Delta}_k Y} f_k(\Delta_k) \cdot \Delta_k^3 d\Delta_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\Delta}_k^5}. \tag{30}$$

**Частоту колебаний основного тона системы с жесткостью $a_{пр.}$ и сосредоточенными массами $m$ запишем так:**

$$\omega_{пр.}^2 = \omega_{нел.}^2 = \frac{a_{пр.}}{m} \lambda_1, \tag{31}$$

**где $\lambda_1$ - коэффициент, зависящий от этажности. Подставляя (30) в (31), получаем:**

$$\omega_{пр.}^2 = \frac{a}{m} \lambda_1 \cdot \frac{5a}{Y^5} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_0^{\overline{\Delta}_k Y} f_k(\Delta_k) \cdot \Delta_k^3 d\Delta_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\Delta}_k^5}. \tag{32}$$

**Так как $\frac{a}{m} \lambda_1 = \omega_{лин.}^2$, то из (32) получим:**

$$\omega_{нел.} = \omega_{лин.} \left\{ \frac{5a}{Y^5} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_0^{\overline{\Delta}_k Y} f_k(\Delta_k) \cdot \Delta_k^3 d\Delta_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\Delta}_k^5} \right\}^{1/2}. \tag{33}$$

**С помощью формулы (33) могут быть определены значения $\omega_{нел.}$ при тех же зависимостях, которые были исследованы для систем с одной степенью свободы.**

**Рассмотрим различные случаи нелинейных законов изменения восстанавливающей силы.**

$$1.\ f_k(\Delta_k) = \Delta_k - \varepsilon\Delta_k^3. \tag{34}$$

**Из (33) получим**

$$\omega_{нел.} = \omega_{лин.} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{n} \left[ \overline{\Delta}_k^5 - \frac{5}{7} \varepsilon Y^2 \right] \sum_{k}^{n} \overline{\Delta}_k^7}{\sum_{k=1}^{n} \overline{\Delta}_k^5} \right\}^{1/2} . \tag{35}$$

$$2.\ f_k(\Delta_k) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \Delta_k^j . \tag{36}$$

**Для $\omega_{нел.}$ получим**

$$\omega_{нел.} = \omega_{лин.} \left\{ \frac{5 \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot \frac{Y^{j-1} \overline{\Delta}_k^{j+4}}{j+4}}{\sum_{k=1}^{n} \overline{\Delta}_k^5} \right\}^{1/2} . \tag{37}$$

$$3.\ f_k(\Delta_k) = \frac{1}{\varepsilon} \sin \varepsilon \Delta_k . \tag{38}$$

$$\omega_{нел.} = \omega_{лин.} \left\{ \frac{5 \sum_{k=1}^{n} \left[ \frac{3\overline{\Delta}_k}{\varepsilon^3 Y^3} - \frac{6}{\varepsilon^5 Y^5} \right] \sin \varepsilon Y \overline{\Delta}_k - \left[ \frac{\overline{\Delta}_k^3}{\varepsilon^2 Y^2} - \frac{6\overline{\Delta}_k}{\varepsilon^4 Y^4} \right] \cos \varepsilon Y \overline{\Delta}_k}{\sum_{k=1}^{n} \overline{\Delta}_k^5} \right\}^{1/2} . \tag{39}$$

$$4.\ f_k(\Delta_k) = \begin{cases} \Delta_k; & \Delta_k = \Delta_{k1}; \\ \gamma \Delta_k + (1-\gamma)\Delta_{k1}; & \Delta_k \geq \Delta_{k1}. \end{cases} \tag{40}$$

$$\omega_{нел.} = \omega_{лин.} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{n} \left[ -\frac{(1-\gamma)}{4} \frac{\Delta_{k1}^5}{Y^5} + \frac{\gamma - \Delta_k^5}{4} \frac{(1-\gamma)\Delta_{k1}\Delta_k^4}{Y} \right]}{\sum_{k=1}^{n} \overline{\Delta}_k^5} \right\}^{1/2} . \tag{41}$$

$$5.\ f_k(\Delta_k) = \begin{cases} \Delta_k; & \Delta_k = \Delta_{k1}; \\ \gamma_1 \Delta_k + (1-\gamma_1)\Delta_{k1}; & \Delta_{k1} \leq \Delta_k \leq \Delta_{k2}; \\ [\gamma_2 \Delta_k + (1-\gamma_1)\Delta_{k1} + (\gamma_1 - \gamma_2)\Delta_{k2}]; & \Delta_k \geq \Delta_{k2}; \end{cases} \tag{42}$$

$$\omega_{нел.} = \omega_{лин.} \left\{ \frac{\gamma_2 + \frac{5}{4}[1 - \gamma_1 + (\gamma_1 - \gamma_2)\beta] \frac{\Delta_{k1}}{\Delta_k Y} - \left[ \frac{1}{4}(1-\gamma_1) + \frac{1}{4}(\gamma_1 - \gamma_2)\beta^5 \right] \left( \frac{\Delta_{k1}}{\Delta_k Y} \right)^5}{\sum_{k=1}^{n} \overline{\Delta}_k^5} \right\}^{1/2} . \tag{43}$$

$$6.\ f_k(\Delta_k) = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arctg} \varepsilon \Delta_k . \tag{44}$$

$$\omega_{нел.} = \omega_{лин.} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{5}{4\varepsilon Y} \overline{\Delta}_k^4 \operatorname{arctg} \varepsilon Y \overline{\Delta}_k - \frac{5}{12 \varepsilon^2 Y^2} \overline{\Delta}_k^3 + \frac{5}{4 \varepsilon^4 Y^4} - \frac{5}{4 \varepsilon^5 Y^5} \operatorname{arctg} \varepsilon Y \overline{\Delta}_k}{\sum_{k=1}^{n} \overline{\Delta}_k^5} \right\}^{1/2} . \tag{45}$$

**По формуле (45) вычислены значения $\omega_{нел.} / \omega_{лин.}$, а затем и $T_{нел.} / T_{лин.}$ для $n = 5$. В табл.2 приведены принятые значения $C_k$, $\overline{\Delta}_k$ $(k = 1,2,...5)$, которые взяты из [6].**

**Таблица 2**

| k | $C_k$ | $\overline{\Delta}_k$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.2856 | 0.2856 |
| 2 | 0.548 | 0.2624 |
| 3 | 0.7656 | 0.2176 |
| 4 | 0.922 | 0.1564 |
| 5 | 1 | 0.078 |

**Значения $T_{нел.} / T_{лин.}$ при $\varepsilon Y = 2,4,6,8,10$ получились соответственно 1.04; 1.1; 1.194; 1.285; 1.381. Интересно сравнить $T_{нел.} / T_{лин.}$, полученные при $n = 1$ и $n = 5$. Соответствующие зависимости приведены на рис. 5.**

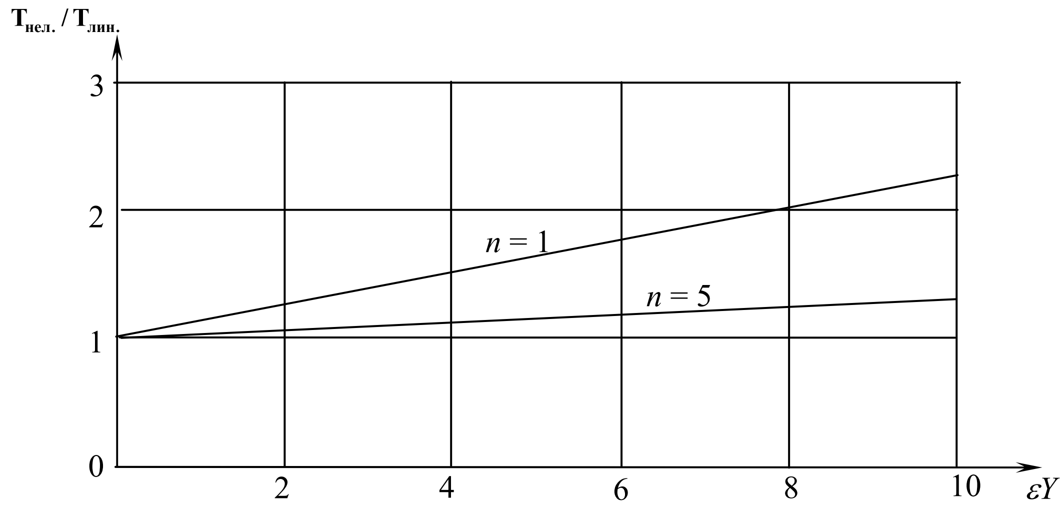



**Рис. 5. Зависимости отношений периодов от перемещения**

**Как видно из этого графика, $T_{нел.} / T_{лин.}$ увеличивается с увеличением $\varepsilon Y$. При этом при одном и том же перемещении $\varepsilon Y$ отношение $T_{нел.} / T_{лин.}$ больше в одноэтажном здании.**

**Во всех рассмотренных случаях нелинейного деформирования нагружение и разгрузка происходили по одному и тому же нелинейному закону. Если же нагружение происходит по нелинейному закону, а разгрузка - по линейному, то период гистерезисных колебаний $T_{гис.}$ может быть определен по формуле [4].**

$$T_{гис.} = \frac{T_{нел.} + T_{лин.}}{2}, \tag{46}$$

**где $T_{нел.}, T_{лин.}$ – соответственно период нелинейных и линейных колебаний.**

**Л И Т Е Р А Т У Р А**

1. **Розенберг Р.М. О формах колебаний нормального типа нелинейных систем с двумя степенями свободы// Механика. 1961. N 5.**
2. **Розенберг Р.М. Нормальные формы колебаний нелинейных систем с $n$ степенями свободы/Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия Е. Прикладная механика. 1962. Т. 29. N 1.**

**3. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Ил. 1961.**

**4. Амбарцумян В.А. О периодах свободных нелинейных колебаний каркасных зданий// Изв. АН Арм. ССР. Серия техн. наук. 1971. Т. XXIV. N 1.**

**5. Амбарцумян В.А. Об одном методе определения частот и форм свободных нелинейных колебаний каркасных зданий//Известия АН Арм. ССР. Серия техн. наук. 1979. Т. XXXII. N 5.**

**6. Хачиян Э.Е., Амбарцумян В.А. Динамические модели сооружений в теории сейсмо-стойкости. М.: Наука. 1981.**

**7. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.:Машиностроение. 1976.**

**8. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т.3. М.: Машиностроение. 1968.**

**9. Вибрации в технике. Колебания нелинейных механических систем. Т.2. М.: Машиностроение. 1979.**