ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЛАМИНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КАНАЛАХ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

А. САРУХАНЯН

Главной задачей исследования нестационарных потоков является расчет гидравлических потерь. Приведена формула расчета гидравлических потерь при нестационарном напорном движении. Для оценки отдельных членов формулы и проведение расчета потерь энергии необходимо исследовать структурные изменения нестационарных потоков. Исследованы нестационарное ламинарное движение вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Интегрированием дифференциального уравнения осесимметричного напорного движения получены закономерности изменения гидродинамических параметров потока при общих граничных и начальных условиях. Исходя из общих решений выведены формулы расчета гидродинамических параметров напорного нестационарного потока при мгновенном изменении градиента давления. Компьютерными экспериментальными исследованиями построены графики изменения мгновенных скоростей, касательных напряжений, средней скорости потока, коэффициентов количества движения и кинетической энергии. По результатам выполненных вычислений сделаны выводы о характере структурных изменений и образовавшихся гидравлических потерь.

Потери энергии жидкости при нестационарном движении в цилиндрических каналах круглого поперечного сечения определяют по формуле:

$$\mathbf{hw} = -\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x}\cdot l + \frac{l}{g}\left(\beta\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{2}\frac{\partial \beta}{\partial t}\right), \tag{1}$$

где β – коэффициент изменения количества движения,

$$\beta = \frac{\int\limits_{A_0} u^2\, dA}{V^2 A_0}. \tag{2}$$

Ускорение (1) можно представить в виде

$$hw = hw_0 + h_{i_1} + h_{i_2}, \tag{3}$$

здесь hw_0 – потери энергии жидкости при стационарном движении, к которому стремится рассматриваемое нестационарное движение, $h_{i1} = \beta\frac{\partial V}{\partial t}\frac{l}{g}$ - инерционный напор, вызванный изменением скорости движения hi_2 - инерционный напор обусловленный изменением деформации эпюры скоростей [3].

Таким образом характер потерь энергии при стационарном и нестационарном движении вовсе не одинаковые. При нестационарном движении часть удельной энергии жидкости расходуется на преодолении силы сопротивления, превращаются в тепловую энергию, рассеивается и не восстанавливается, а другая часть расходуется на преодоление инерции жидкости и на деформации эпюр скоростей, которая со временем восстанавливается. При нестационарном движении все параметры потока и, следовательно, потери энергии зависят от времени и подлежат определению. Если принять гипотезу квазистационарного изменения, при котором распределение скоростей имеет форму квадратичной параболы, то получим

$$\beta = 1{,}33\,, \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} = 0, \quad hw_h = \frac{2\tau_0 l}{\rho g r_0}:$$

В этом случае уравнение (1) примет вид

$$\frac{2\tau_0 l}{\rho g r_0} = -\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x}\cdot l + \frac{1{,}33\cdot l}{g}\frac{dv}{dt}\,. \tag{4}$$

По квазистационарной модели получены расчетные формулы касательных напряжений на стенке неподвижного канала в форме передаточных функций [3]. Однако, квазистационарная модель не совсем точно выражает суть происходящих процессов и механизмов образования потери энергии [1].

Расчет потерь энергии, при нестационарном движении нужно проводить по формуле (1). Однако для этого необходимо изучить закономерность изменения распределения мгновенных скоростей по живому сечению нестационарного потока.

В напорных системах, вследствие изменений градиента давления $\frac{\partial P}{\partial x}$ нарушается стационарный режим и происходит изменение гидродинамических параметром потока. Вследствие изменений градиента давления меняются силы трения и энергии, которые приводят к нестационарному режиму. Изучение нестационарных процессов в напорных системах имеют большое практическое и теоретическое значение.

Исследование нестационарного ламинарного движения в цилиндрических каналах круглого поперечного сечения приводится к интегрированию уравнения Habse – Стокса, которое осесимметричного течения в цилиндрических координатах имеет вид [2,5,6].

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right), \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \tag{5}$$

где U – компонент скорости по направлению движения, а остальные компоненты равны нулю.

Уравнение неразрывности, при этом имеет вид $\frac{\partial U}{\partial x} = 0,$ откуда следует что по направлению движения, скорость не зависит от координата x. Из последних двух уравнений (5) следует, что давление зависит от координата x и t. Следовательно, в фиксированном сечении $(x = Const)$. градиент давления будет зависеть от времени

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = f(t) \tag{6}$$

Для интегрирования уравнения (5) задаются начальные и граничные условия. В качестве начального условия задается функция распределения скоростей по живому сечению в момент начала нестационарного процесса. Рассматривается общий случай, когда начальное распределение скоростей задается в виде непрерывной функции, зависящей от координата $U\big|_{x=0} = \varphi(r)$. Применяется жидкость вязкая, что приводит к формированию граничного условия $U(R,t) = 0$, где R – радиус неподвижного канала.

Вводя безразмерные координаты,

$$U = U_\infty U_0; \qquad x = Rx_0;$$
$$r = Rr_0;$$
$$t = \frac{R}{U_\infty}t_0; \qquad P = \rho U_\infty^2 P_0;$$

где $U_\infty = \lim_{t\to\infty} U(0,t)$.

Уравнение (5) приводится в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} = f(t) + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right), \tag{7}$$

где $Re = \frac{U_\infty \cdot R}{\nu}$ - число Рейнольдса.

Начальные и граничные условия полученного уравнения имеют вид.

$$\begin{aligned} &U(r,t)\big|_{t=0} = \varphi(r), \qquad (0 \le r \le 1; \quad \varphi(1) = 0) \\ &U(r,t)\big|_{t=1} = 0: \end{aligned} \tag{8}$$

Решение уравнения (7) поищем в виде суммы

$$U(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) J_0(rq_k), \tag{9}$$

где, $C_\kappa(t)$ – неизвестные коэффициенты учитывающие отклонение мгновенных скоростей, от их стационарных величин, $J_0(rq_k)$ - Бесселевые функции первого рода нулевого порядка, q_k - корни уравнения $J_0(rq_k)=0$.

Общее решение задачи получено в виде

$$U(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k + \frac{2}{q_k J_1(q_k)}\int_0^t \exp\left(\frac{q_k^2}{Re}t\right) f(t)dt\right)\cdot J_0(rq_k)\exp\left(-\frac{q_k^2}{Re}t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) J_0(rq_k), \tag{10}$$

где

$$A_k(t) = \left(C_k + \frac{2}{q_k J_1(q_k)}\int_0^t \exp\left(\frac{q_k^2}{Re}t\right) f(t)dt\right)\exp\left(-\frac{q_k^2}{Re}t\right). \tag{11}$$

Касательные напряжения между слоями вязкой жидкости определяются по формуле Ньютона.

$$\tau = \pm\mu\frac{dU}{dr}. \tag{12}$$

Следовательно закономерность изменения касательных напряжений, при нестационарном ламинарном осесимметричном движении будет

$$\tau = \mu\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) q_k J_1(rq_k). \tag{13}$$

Значение неизвестных коэффициентов C_k определяют из начального условия (8),

$$C_k = \frac{2}{J_1^2(q_k)}\cdot\int_0^1 \varphi(r)\cdot rJ_0(rq_k)dr. \tag{14}$$

Общие решения задачи (10), (14) дают возможность получить решения для частных случаев. Имея закономерность распределения мгновенных скоростей по живому сечению, вычислим среднюю скорость потока.

$$V = 2\int_0^1 rU(r,t)dr = 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\cdot\frac{J_1(q_k)}{q_k}. \tag{15}$$

Коэффициент количества движения определяем, исходя из уравнений (10) и (15) , получим

$$\beta = 2\int_0^1 \frac{rU^2 dr}{V^2} \qquad (16)$$

Воспользовавшись равенством Парсеваля [4] для ортогональных рядов, вычислено значение интеграла и для коэффициента β получена формула

$$\beta = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2(t)\left[J_1(q_k)\right]^2}{4\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(q_k)}{q_k} A_k(t)\right]^2}. \qquad (17)$$

При постоянном значении перепада давления $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = const$; закономерность распределения мгновенных скоростей получено в виде,

$$\begin{aligned} U(r,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k - \frac{2\,Re\frac{\partial P}{\partial x}}{q_k^3 J_1(q_k)}\left(\exp\left(-\frac{q_k^2}{Re}t\right) - 1\right)\right)\cdot J_0(rq_k)\cdot \exp\left(-\frac{q_k^2}{Re}t\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(C_k + \frac{2\,Re\frac{\partial P}{\partial x}}{q_k^3 J_1(q_k)}\right)\exp\left(-\frac{q_k^2}{Re}t\right) - \frac{2\,Re\frac{\partial P}{\partial x}}{q_k^3 J_1(q_k)}\right)\cdot J_0(rq_k) \end{aligned} \qquad (18)$$

При $t \to \infty$ нестационарное движение стремится к стационарному. Подставляя $t \to \infty$, получим закономерность распределения стационарных скоростей по живому сечению

$$U_{ёї}(r) = -2\,Re\frac{\partial P}{\partial x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(rq_k)}{q_k^3 J_1(q_k)}, \qquad (19)$$

или

$$U_{ёї}(r) = -\frac{Re}{4}\frac{\partial P}{\partial x}\left(1 - r^2\right) = U_{\infty}\left(1 - r^2\right): \qquad (20)$$

Здесь $U_{\infty} = -\frac{Re}{4}\frac{\partial P}{\partial x}$ - максимальная скорость на оси осесимметричного потока, при стационарном движении.

Таким образом, независимо от начального распределения скоростей, при постоянном перепаде давления в осесимметричном потоке закономерность изменения мгновенных скоростей переходят к параболическому закону при $t \to \infty$.

Рассмотрим разгон вязкой несжимаемой жидкости в жесткой цилиндрической трубе круглого поперечного сечения, когда на концы трубы длиной l действует давление P_1 и P_2. Так как жидкость в трубе находится в равновесном состоянии, то $\varphi(r) = 0$, следовательно $C_k(t) = 0$ и $f(t) = -\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{R}{U_{\infty}^2}\frac{P_1 - P_2}{\rho l} = P = const.$

Подставляя значение $C_k(t)$ и $f(t)$ в уравнение (11), получим:

$$A_k(t) = \frac{2\,Re\,P}{q_k^3 J_1(q_k)}\left(1 - \exp\left(-\frac{q_k^2}{Re}t\right)\right). \qquad (21)$$

Имея значение коэффициентов $A_k(t)$ получим закономерность распределения мгновенных скоростей

$$U(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\,\mathrm{Re}\,P}{q_k^3 J_1(q_k)}\left(1-\exp\left(-\frac{q_k^2}{\mathrm{Re}}t\right)\right)J_0(q_k r). \qquad (22)$$

Средняя скорость потока будет

$$V(t)=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\,P}{q_k^4}\left(1-\exp\left(-\frac{q_k^2}{\mathrm{Re}}t\right)\right). \qquad (23)$$

Закономерности изменения касательных напряжений получаем из уравнений (12) и (22)

$$\tau(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\mu\,\mathrm{Re}\,P}{q_k^2 J_1(q_k)}\left(1-\exp\left(-\frac{q_k^2}{\mathrm{Re}}t\right)\right)J_1(q_{kt}). \qquad (24)$$

Для коэффициента количества движения, согласно уравнений (17) получаем формулу

$$\beta=\frac{\sum_{k=1}^{\infty}A_k^2(t)[J_1(q_k)]^2}{4\left[\sum_{k=1}^{\infty}A_k(t)\frac{J_1(q_k)}{q_k}\right]^2}=\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_k^6}\left(1-\exp\left(-\frac{q_k^2}{\mathrm{Re}}t\right)\right)^2}{4\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_k^4}\left(1-\exp\left(-\frac{q_k^2}{\mathrm{Re}}t\right)\right)\right)^2} \qquad (25)$$

Коэффициент неравномерного распределения скоростей, или коэффициент кинетической энергии вычисляется по формуле

$$\alpha=\frac{1}{2}\frac{\int_0^1 r\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_k^3 J_1(q_k)}\left(1-\exp\left(-\frac{q_k^2}{\mathrm{Re}}t\right)\right)\cdot J_0(q_k r)\right)^3 dr}{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_k^4}\left(1-\exp\left(-\frac{q_k^2}{\mathrm{Re}}t\right)\right)\right)^3}. \qquad (26)$$

Из полученных формул следует, что при $t\to 0$, $\beta\to 1$, $\alpha\to 1$, при $t\to\infty$, $\beta\to 4/3$, $\alpha\to 2$, что соответствует стационарному режиму.

Компьютерным вычислением получены графики функций $U(r,t)$, $V(t)$, $\beta(t)$, $\alpha(t)$, при различных значениях числа Рейнольдса.

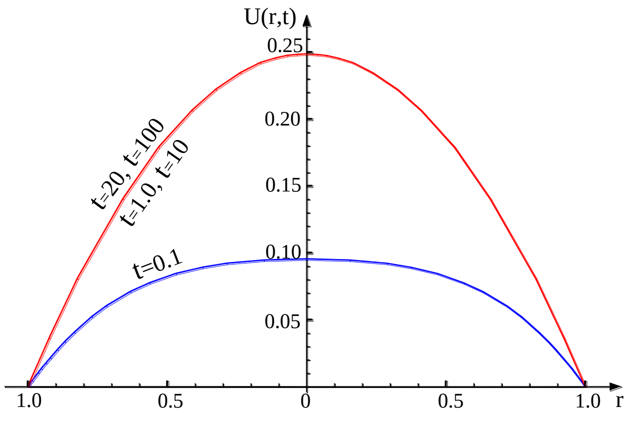

Рис. 1. График изменения скорости, при $\mathrm{Re}=1$, ($t_{ст}=0.824$)

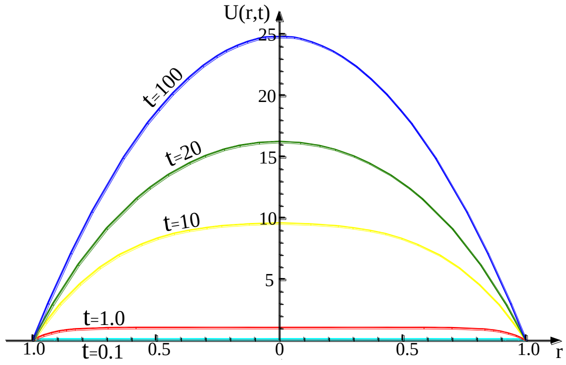

Рис. 2. График изменения скорости, при »ñµ $\mathbf{Re = 100}$, $\mathbf{(t_{ст} = 81.407)}$

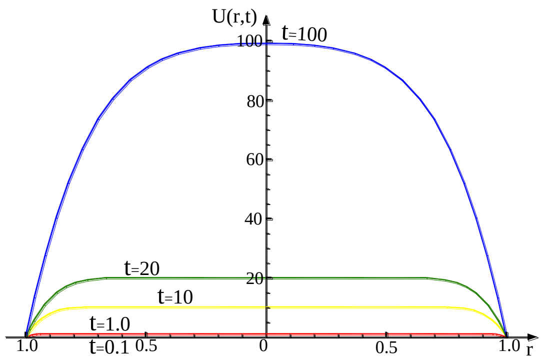

Рис. 3. График изменения скорости, при $\mathbf{Re = 1500}$, $\mathbf{(t_{ст} = 1221.1)}$

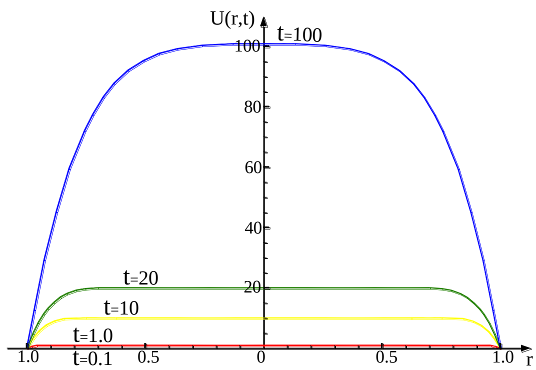

Рис. 4. График изменения скорости, при $\mathbf{Re = 2000}$, $\mathbf{(t_{ст} = 1628.13)}$

Из приведенных графиков видно, что при малых числах Рейнольдса нестационарный режим быстро стремится к стационарному режиму. К каждому графику приведено время стационаризации, когда мгновенная скорость в центре становится равной 0,99 части стационарной скорости.

Из графиков изменения скорости видно, что при разгоне покоящейся жидкости движение начинается вблизи неподвижной стенки. Образуется пограничный слой, толщина которого со временем увеличивается и охватывает все сечение. Благодаря вязкости жидкости движение распространяется к центру.

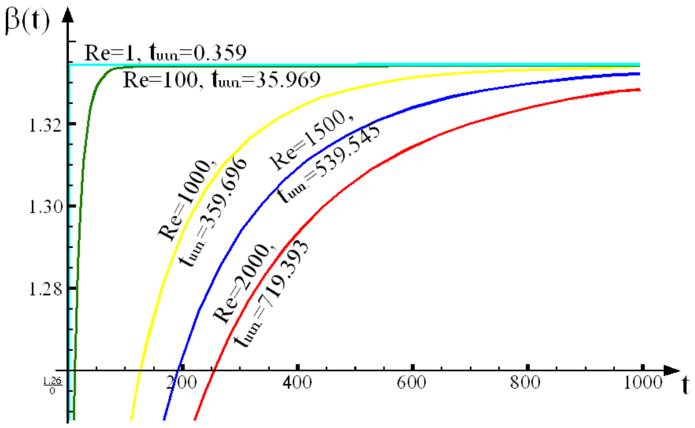

Рис. 5. График изменения коэффициента β(t), при $Re = 1, 100, 1000, 1500, 2000$

На рис.5 приведен график изменения коэффициента количества движения, при разных значениях числа Рейнольдса. Пределы изменения коэффициента β являются $1 \le \beta \le \frac{4}{3}$. При малых числах Рейнольдса коэффициент β быстро стремится к его стационарному значению 4/3. При больших значениях числа Рейнольдса время стабилизации увеличивается. На каждом графике приведено время стабилизации, когда значение коэффициента β приравнивается к 0,99 части его предельного значения.

Коэффициент неравномерного распределения скоростей $\alpha(t)$ определено по формуле

$$\alpha = \frac{2\int_0^R r\big(U(r,t)\big)^3 dr}{R^2\big(V(t)\big)^3}$$

Компьютерным вычислением определены значения коэффициентов $\alpha(t)$. Графики изменения коэффициента $\alpha(t)$ при разных числах Рейнольда приведены на рис.6 На каждом графике указано также время стабилизации.

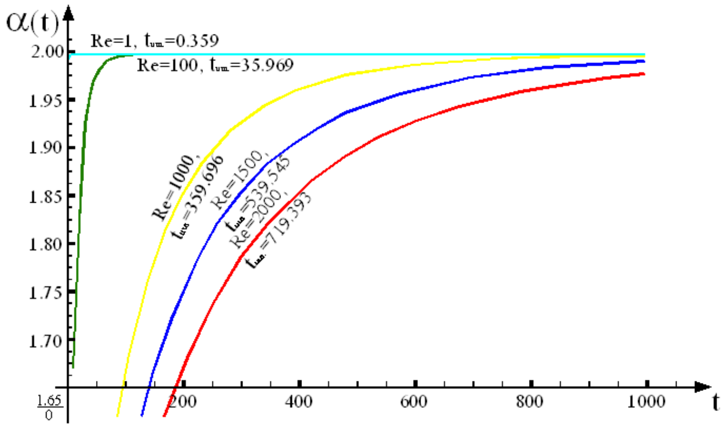

Рис. 6. График изменения коэффициентов $\alpha(t)$ при $Re = 1, 100, 1000, 1500, 2000$

На рис. 7 приведены графики изменения средней скорости V(t) при $Re = 1,100,1500,2000$. При малых числах Рейнольдса процесс быстро стабилизируется (кривая 1). При каждом графике приведены время стабилизации процесса, когда скорость в центре движения становится равной 0,99 части скорости стационарного движения.

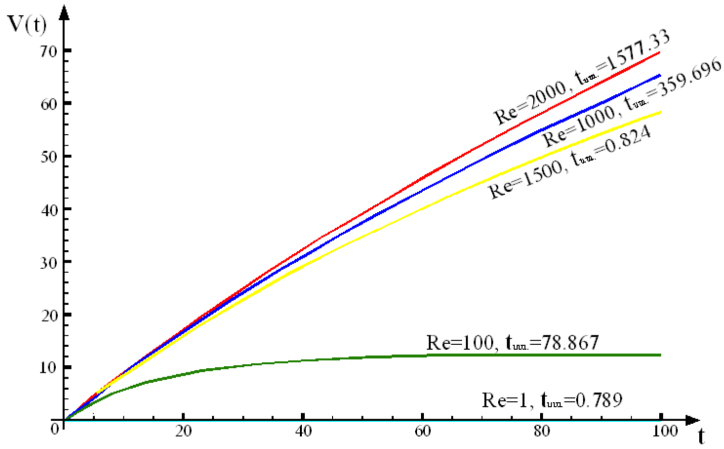

Рис. 7. Графики изменения средней скорости потока при $Re = 1,100,1500,2000$

Имея закономерности изменения средней скорости и коэффициента количества движения, компьютерным вычислением построены графики изменения гидравлических потерь при нестационарном движении (Рис.8).

Из полученных графиков видно, что при малых числах Рейнольдса потери энергии и ее отдельные члены существенных изменений не имеют и процесс быстро стабилизируется. (рис.8). При больших числах Рейнольдса отдельные члены потерь энергии существенно могут измениться в зависимости от времени стабилизации. Для оценки отдельных членов потерь энергии при нестационарном движении нужно построить графики изменения отдельных членов и пределы их отношений.

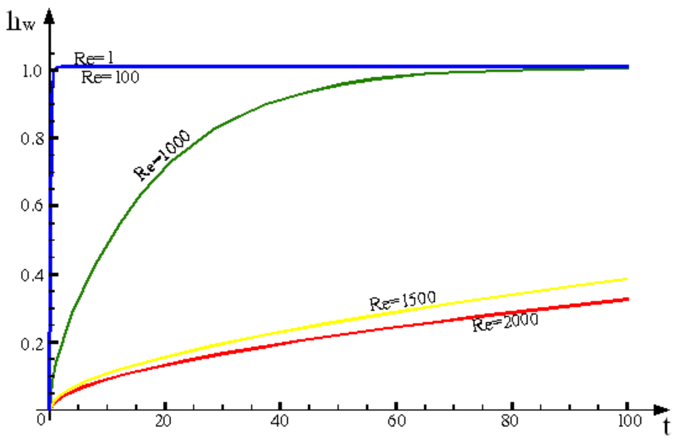

Рис. 8. График изменения гидравлических потерь при $Re = 1,100,150,2000$

На рис.9 приведены графики изменения отношений инерционных членов потерь энергии вызванной изменением скорости потока и деформацией эпюр скоростей при $Re = 1, 100, 1500, 2000$.Из построенных графиков следует, что отношение

$\frac{h_{i1}}{h_{i2}}$ в начале разгонявшегося нестационарного движения имеет большое значение, что обусловлено равномерностью после скоростей и большого изменения градиента скорости. Далее происходит деформация поля скоростей, вследствие чего градиент изменения скорости уменьшается и $\frac{h_{i1}}{h_{i2}}$ отношение стремится к числу 19. Далее это отношение увеличивается и ассиметрично приближается к значению 26,8. Компьютерным вычислением уточнены граничные значения. В момент начала нестационарного процесса отношение $\frac{h_{i1}}{h_{i2}}$ начинается от 57, 2, далее понижается до 19,3 и ассиметрично приближается к значению 26,1.

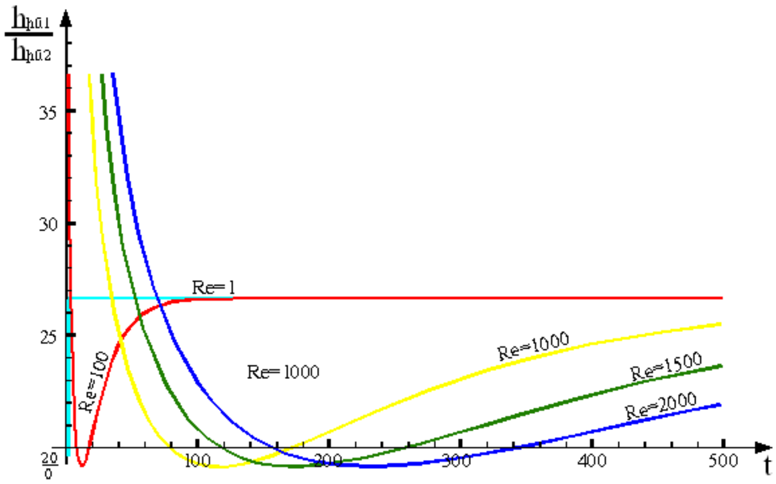

Рис. 9. График изменения отношений членов потерь энергии при $Re = 1, 100, 1000, 1500, 2000$

В соответствии с изменение поля скоростей получены закономерности изменения касательных напряжений между слоями жидкости. Графики изменения касательных напряжений приведены на рис.10-13.

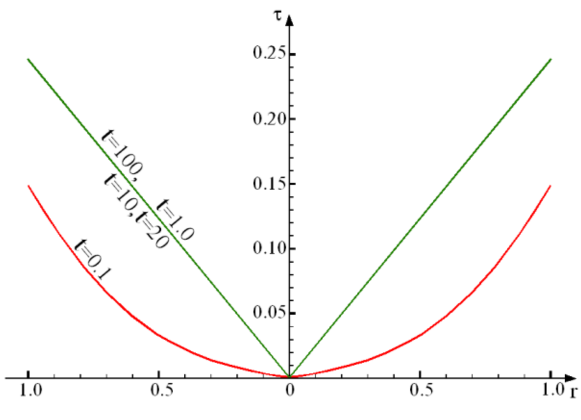

Рис. 10. График изменения касательных напряжений при $Re = 1$, $(t_{ст} = 0.824)$

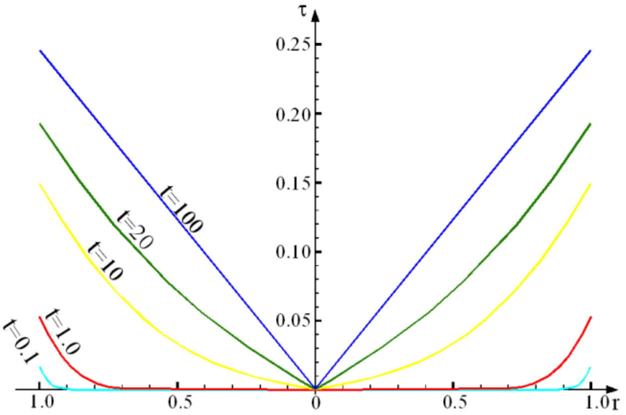

Рис. 11. График изменения касательных напряжений при $Re = 100$, $(t_{ст} = 81.407)$

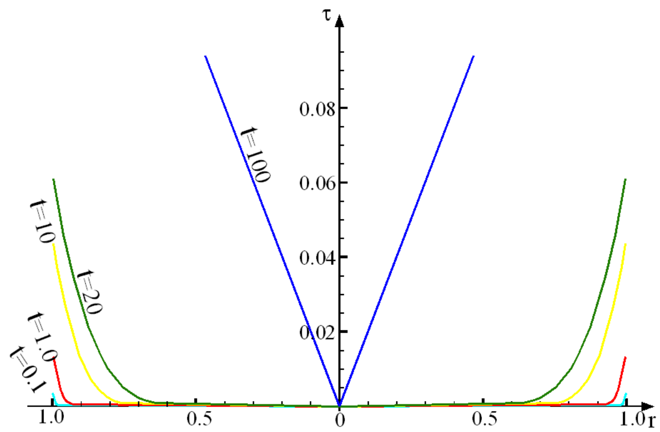

Рис. 12. График изменения касательных напряжений при $Re = 1500$, $(t_{ст} = 1221.1)$

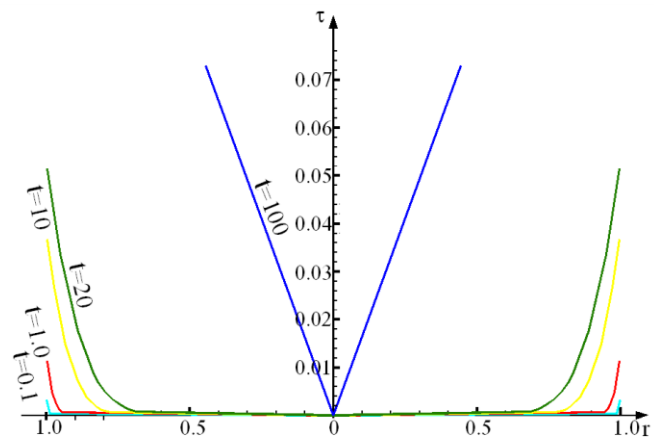

Рис. 13. График изменения касательных напряжений при $Re = 2000$, $(t_{ст} = 1628.13)$

В соответствии с изменением эпюры скоростей, изменяются также касательные напряжения на стенке неподвижного канала. Следовательно изменится также потери энергии образующаяся вследствие касательных напряжений на стенке неподвижного канала. Потери энергии образующаяся от касательного напряжения на стенке неподвижного канала будет

$$h_w = \frac{\tau_0 l}{\rho g R} = \frac{4\tau_0 l}{\rho g d} \tag{27}$$

Имея закономерность изменения касательных напряжений, можно получить закономерность изменения потерь энергии от касательного напряжения на стенке неподвижного канала.

Компьютерным вычислением получены графики изменения потерь энергии от касательного напряжения на стенке канала при $(Re = 1, 100, 1500, 2000)$ (рис.14). По характеру изменения эти графики похожи на графики, приведенные на рис.8. Для количественного сравнения составлены графики изменения отношений этих потерь (рис.15).

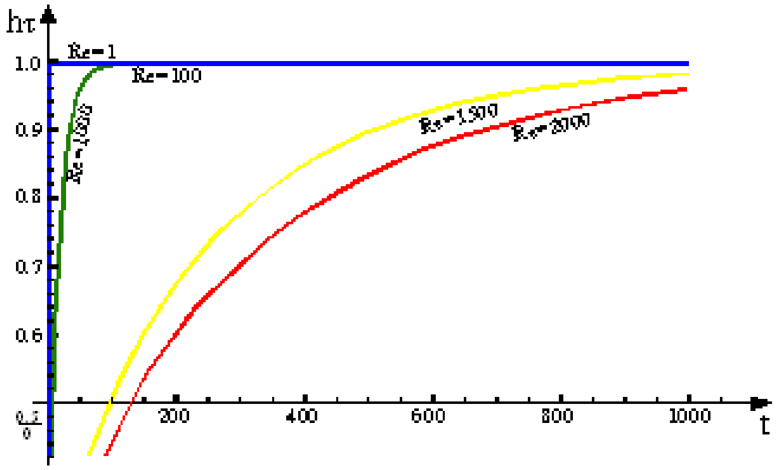

Рис. 14. График изменения потерь энергии от касательного напряжения на стенке канала при $Re = 1, 100, 1500, 2000$

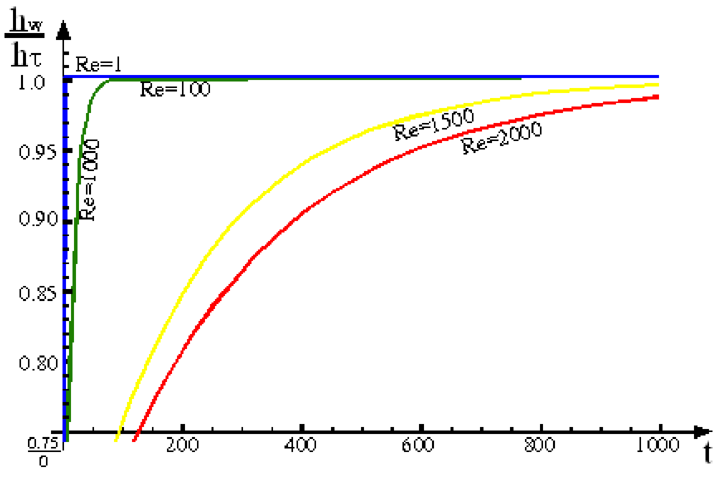

Рис. 15. График изменения отношений потери энергии при нестационарном движении и от касательного напряжения на стенке канала

Из приведенных графиков и сравнительных количественных анализов можно сделать следующие выводы.

1. Потери энергии при нестационарном движении существенно отличаются от потерь энергии касательных напряжений на стенки канала.

2. При малых числах Рейнольдса эти потери энергии существенно не отличаются.

3. Сумма членов потерь энергии при нестационарном движении ассиметрично стремится к потере энергии от касательного напряжения на стенке канала.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Громека И. С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах//М.: Изд-во АН СССР. 1952. - С. 149-171
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука. 1973. – 848 с.
3. Попов Д.Н. Нестационарные гидромехнические процессы. М.: Машиностроение. 1982. - 239 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. - Изд. 2-е. М.: Наука. 1974. – 295 с.
5. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М. 1955. - 519 с.
6. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течениий. М.-Л. 1951. – 420 с.

АРЕСТАК САРУХАНЯН, доктор технических наук, профессор Ереванского архитектурно-строительного института

E-mail: asarukhanyan@ysuac.am